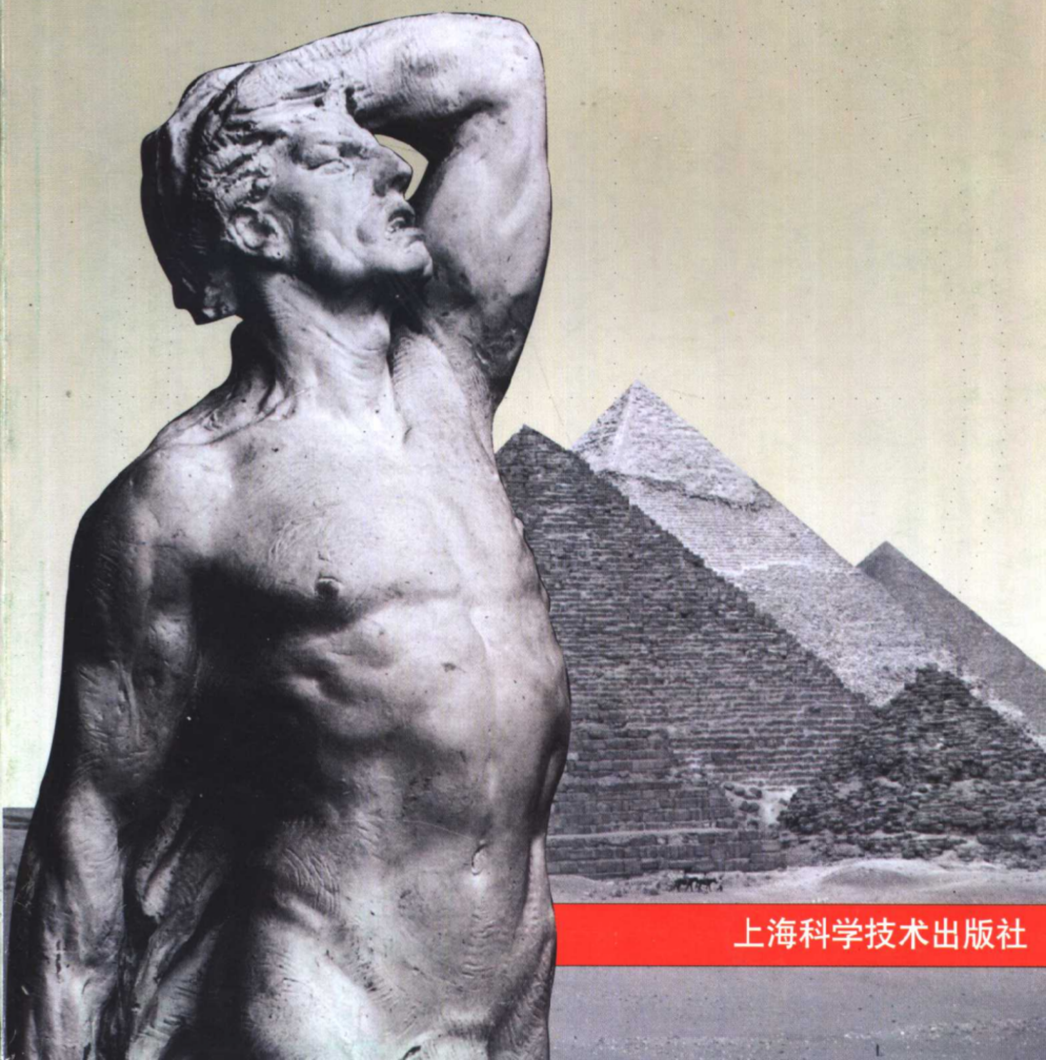
数学分析

周民强　编著

第二册



上海科学技术出版社

责任编辑 苏德敏
刘 啸
封面设计 彬 彬

SHUXUE
FENXI

ISBN 7-5323-6669-3



定价：24.60 元

数学分析

（第二册）

周民强编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本教材讲述的是高等数学的基础课程——数学分析，其核心内容为微积分学.这套教材共三册，本书是其中的第二册.

本书共有六章，分别为定(Riemann)积分，反常积分，常数项级数，函数项级数，幂级数、Taylor 级数以及 Fourier 分析初步，主要讲述了定(Riemann)积分、反常积分、级数理论、Fourier 分析等内容.

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所使用的讲义基础上修改而成，内容丰富、深入浅出.对较难理解的定理、定义以及可深入探讨的问题，本书以加注的形式予以解说，以利于读者更好地接受新知识.本书在每一章的末尾还附有注记，意在为读者更清楚地了解知识背景，更迅速地提高数学能力创造条件.本书选用了适量有代表性、启发性的例题，还选入了足够数量的习题和思考题.习题和思考题中，既有一般难度的题目，也有较难的题目，供读者酌情选做.

本教材可作为大学本科阶段的数学、概率统计、应用数学、力学以及计算机等相关专业的教科书，也可作为广大数学工作及爱好者的参考图书.

责任编辑 刘 啸 苏德敏

数 学 分 析

(第二册)

周民强 编著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)

新华书店上海发行所经销 常熟市兴达印刷有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 340 000

2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—5 200

ISBN 7-5323-6669-3/O · 262

定价：24.60 元

致 读 者

《数学分析》的核心内容是"微积分"——微分学与积分学的统称，它是数学发展史中最伟大的成果，始创于17世纪下半叶，其代表人物是两位著名的学者：英国的I. Newton(1643～1727)和德国的G. W. Leibniz(1646～1716).

Newton和Leibniz对微积分的杰出贡献与这一领域有关的前期工作不同，他俩使微积分学成为一门独立的学科，而不再是古希腊几何的附庸和延续，且为许多课题提供了崭新的研究方法. 自微积分始，数学发展成为变量数学时期. 微积分从运动、变化的观点、方法来考察各种事物和现象，这正符合客观世界处于不断运动、变化的实际. 因此，微积分的建立给予科学、技术领域巨大的影响，推动了生产力的发展. 特别是在天文、力学方面的成就，在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条. 另一方面，也由于当时的微积分学自身理论的不完善而受到责难，但这些都不能阻挡它的继续前进.

19世纪初期，由于科学技术进步的推动，促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作，终于在19世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系，为微积分的普及创造了更加有利的条件，也使它成为今天众多院校的必修课程.

因此，在三百余年后的今天，学习微积分已不能算是件"时髦"的事情了. 如果从培养21世纪的人才而言，或许只能说是一张"入门券"而已.

学习微积分课程的目的有三：一是可应用于实际课题；二是通过它学习数学思维、逻辑判断的能力；最后一点是要为学习

其他课程奠定基础.

本册介绍微积分学的另一组成部分——Riemann 积分(定积分)和无穷级数的理论,我们将看到它们仍然是建立在极限思想的基础之上并贯穿始终,只是在形式结构上稍有不同而已.

读者在本书第一册的学习中,已经对微积分产生了浓厚的兴趣,这就为进一步学习增添了强大的动力. 或许有人对先前的学习感到有些吃力,那么应该看到这是一种正常现象. 如果我们想到那些创建微积分的大师们自己都表达不清某些基本概念,直到 19 世纪中期微积分才树立起一个较严密而完整的体系时,那么今天对一个初学者来说在学习上遇到些困难又算得了什么! 况且,时代不同了,人类的智慧在逐代升级,各种现代化的氛围为大家攀登科学高峰创造了极为有利的条件,"万事俱备,只欠东风"这"东风"不是别的,就是自己的"努力,奋进","不怕难,只怕站",正所谓

道虽远,不行不至,
事虽难,不为不成,

最后预祝大家胜利完成本册的学习任务!

序

本教材的前身是北京大学数学系教学用的讲义,现在出版成书已进入21世纪了.面向这一重大挑战,在撰稿的进程中,以下几个方面是作者着重思考并力图落实的.

1. 加强导引性论述,介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法,这或许有益于树立正确的数学观,增加学习的活泼性.

2. 适当提高起点,扩大知识面。书中在讲解各种理论的应用时,列举了丰富的典型例题,以利于在提高启发式教学水平的同时,让学生有一个扩展的自学园地.

3. 为了培养数学思维的习惯,以及养成"会学"数学的能力,本书在每章节后列有适当数量的思考问题.此外,还以加注,以及用小字和附录的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项,这也对引发读者的创新思维有所助益.

4. 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一,本书一律用原文书写(在页末给出中文译名供参考),并尽力介绍他们的国籍和生卒年代.尊重曾为人类的科学进步作出过贡献的学者,是我们后代人文明的表现之一.

5. 对于想用本书作为正式教材的学校和教师来说,在教学实践中必须依据具体的培养目标和实际情况对其内容作适当取舍,不能照本宣科.希望广大读者和教师对本书提出批评

和建议.

最后,衷心感谢上海科学技术出版社对本书的出版所给予的鼓励和支持.

作者

2002.5

目　　录

积分史简述

积分起源于求积问题.早在古代人们就着手计算由曲边围成的面积,如叙拉古(属西西里岛)的 Archimedes(公元前 287～212 年)就曾探求过抛物弓形的面积,又如我国南北朝时期的刘徽,在公元三世纪也曾力求单位圆面积.他们的方法都是用许多不重叠的三角形来拟合图形.由于时代的限制,他们不能克服"无穷运算"的困难,加之没有一般曲线的概念,求积问题一直没有多大进展.到了文艺复兴时期(约公元 1200～1600 年),欧洲在科学技术的推动下,需要求积的对象扩大了,许多学者为了求出各种曲边围成的面积(如正弦曲线,x^2 等),曾创造了更多的巧妙方法.然而由于这些技巧随边界曲线的不同而不同,且与其几何特征密切相关,也使求积问题裹足不前.

到了 17 世纪下半叶,研究物体位移运动以及各种事物的变化规律成为数学、物理学的主要课题,致使许多学者形成了以运动变化的观点考察对象的思想.如视曲线为点变动的轨迹,甚至将质点作变速直线运动的规律也用曲线来描述.这些研究工作深入揭示出切线(斜率)与曲线纵坐标变动之间的联系,从而认识到求积与求导的互逆关系,使积分问题作为求导的逆运算来处理,微积分主要框架基本构成.这就是两位伟大学者:英国的 I. Newton 和德国的 G. Leibniz 的主要建树,在微积分这一伟大历史成就的丰碑上,永远留下了他们的名字.

Newton-Leibniz 时代的积分学在本质上应该认为是关于曲线的积分.虽然 Leibniz 曾界定积分为"某种求和过程",但由于涉及到对所谓"无穷多个无穷小量的和"的运算的正确认识,

也就没有引起人们的重视而无法开展.

18 世纪的数学家,受到微积分的巨大功效的激励,无暇顾及当时微积分学内部存在的不严谨性问题,而继续奋发前进,并创立了许多分析数学的新领域,获得了丰富的成果.

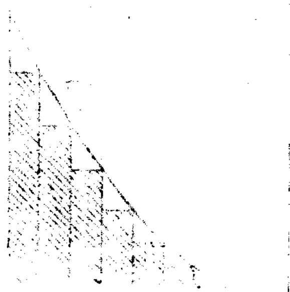
然而,随着物理学研究领域的扩大和深入(如振动、光和热等),用以表达运动变化规律的数学中早期的函数概念受到了极大的冲击,迫使人们对函数只是由一个解析式表达的连续曲线的说法加以改变.特别是 1810 年左右法国数学物理学家 Fourier 关于热传导理论的开创性工作,还一度动摇了 17 世纪将积分作为反导数运算的认识,同时也使其中所运用的所谓“无穷小分析”的不确切陈述再也无法迎接新的挑战,微积分体系奠基工作即严密化开始了.

所谓严密化,是指要把微积分中最基本的概念建立在严谨的逻辑的基础之上.在这一方面作出重大贡献的应是法国数学家 Cauchy,他在 19 世纪 20 年代发表的著作中引进了变量的极限概念,廓清了存在于前期的关于无穷小量的“不可分量”、“瞬”、“微差”等不同描述,从而建立起定积分作为“分割、求和、取极限”的统一格式.不过,这一积分定义是针对连续函数而发的.到了 19 世纪 30 年代,函数概念几经周折终于由德国数学家 Dirichlet 说定.他在 1837 年的文章中给出了至今还沿用的(单值)函数的定义,从而对函数认识的混乱局面得到了控制,微积分学的基本研究对象也有了共同的规范,为微积分学的进一步发展奠定了基础.1854 年德国数学家 Riemann(Diriehlet 的学生)针对一般的函数,给出了积分的定义(这一工作由德国数学家 Dedekind 于 1867 年发表),极大的扩充了可积分的函数类,保留着积分作为求积的原有内容,还在新的基础上重新树立起积分论初创期的成果.同时,法国数学家 Darboux 对此又作了更加细微的解剖.但总的说来,我们称这一积分论为 Riemann 积分体系.

积分史的简单回顾使我们懂得,一个完整的概念和正确有

效的重大理论的建立,需经过长时期的磨练和几代人的艰苦努力.幸运的是,我们这一代人不必再从头学起,而可以站在巨人的肩上向高处攀登.本册所介绍的积分理论,主要是指19世纪数学家们整理完成的工作.

科学在不断地前进,积分论的进一步革新,是在20世纪初期由法国数学家 Lebesgue(1875～1941)完成的,它为现代分析数学打开了大门.



第七章 定(Riemann)积分

§1 定(Riemann)积分的概念

1.1 曲边梯形的面积问题

积分概念来自求由曲边围成的区域面积问题,且早在古代就开始探讨了(见本章注记). 但在18世纪以前,由于人们无法正确把握无限运算过程,还不清楚实数系统的结构,也就缺乏对连续函数的性质的认识,因此不能形成处理求面积问题的统一格式和方法.

第一个明确提出"分割函数的定义区间,求在子区间上矩形面积的总和,再取极限(子区间长度趋于零)的格式"来求面积的应推法国数学家 Cauchy. 为了说明这一想法,让我们先举一例:

例 求坐标平面上由抛物线 $y=x^2$,直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的曲边三角形的面积(图 7-1)

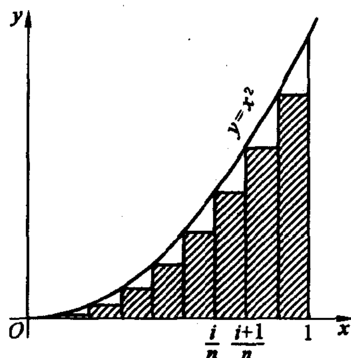


图 7-1

解 用分点 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$ 将区间$[0,1]$划分开来,在每个子区间$\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$上取高为 $y=$

$\left(\frac{i}{n}\right)^2$,作小矩形,它们面积的总和为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

再取极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = \frac{1}{3}$,求出面积为$\frac{1}{3}$.

如果上述求积的方法要推广到一般的函数 $y=f(x)$上去,那么我们可以提出以下质疑:

(1) 上例中如此求得的值$\frac{1}{3}$是该曲边三角形的面积吗?如果在每个子区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上所作小矩形的高为$\left[\frac{i-1}{n}\right]^2$,甚至取为子区间中点上的高,此时和式极限是否仍相同?不同怎么办?

(2) 如果把区间划分成 2^n 个子区间,甚至不是等分,然后仍然“以直代曲”在子区间上作矩形,求和取极限,其极限值是否相同?

(3) 如果用上述方法求积,万一极限不存在怎么办?此时,是计算方法不对呢,还是该曲边图形没有面积?

对此,法国数学家 Cauchy 在《分析概论》(1823 年)一书中指出(用现在的写法),若 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,且对$[a,b]$任作分划 Δ:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b, \quad \|\Delta\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{(x_i-x_{i-1})\},$$

则必存在极限

$$I=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\xi_i=x_i \text{ 或 } x_{i-1}. \qquad ①$$

并认定值 I 即为该曲边梯形的面积.

由于缺乏一致连续的概念,致使 Cauchy 提出的证明是不严格的.此外,他的这一求积法也只适用于至多具有有限个间断点的函数.然而在 19 世纪 20 年代,Fourier 级数(见第十二章)的收敛课题正受到广泛关注,对此作出重要贡献的德国数学家

Dirichlet 希望把自己给出的收敛定理推广到具有无穷多个不连续点的函数上去. 在这里,他首先就遇到了一个函数的可积性问题,但是没有解决.

德国数学家 Riemann 在柏林大学学习时,是 Dirichlet 的学生,当他获悉这一信息时,以极大兴趣研究此课题. 他不是先假定函数 $y=f(x)$是连续的,而是探求①式成立与 $f(x)$的属性的关系,特别是把①式内 $f(\xi_i)$中的 ξ_i 改为子区间$[x_{i-1},x_i]$内的任一点,为积分操作提供很大方便,Riemann 的工作为经典积分理论奠定了严密的基础,他不仅给出了函数可积的充分必要条件,而且给出一个具有无穷多不连续点的可积函数的著名例证.

至于第(3)点质疑,即当①式极限不存在时应当如何认识?此时,我们只能认为该曲边梯形的"面积"不存在,或更确切地说,在用这种方式计算和认识下,它没有面积. 从本质上讲,平面区域的"面积"应在数学上给予定义. 因此,上面的做法实际上是在给出面积的算法中同时也给出了面积的定义.

1.2 定积分的定义

设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数.

(1) 把$[a,b]$分成有限个子区间,即在$[a,b]$中插入有限个分点,一般都表示为

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并形成一组 n 个相连的子区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$. 我们称此为$[a,b]$的一个**分划(分割)**,记为 Δ,并记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$$(i=1,2,\cdots,n)$. 以及 $\|\Delta\|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,即各子区间长度之最大值,称为分划 Δ 的**模**.

(2) 在每个子区间中任取一点:

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

简称为插点组,并记为$\langle\xi\rangle$.

(3) 把分划 Δ 的各子区间与插点组$\langle\xi\rangle$上相应的函数值组成和式

$$S_\Delta = S_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

称为 $f(x)$在$[a,b]$上的 **Riemann 积分和**,简称为**积分和**,其值与分划 Δ、插点组⟨ξ⟩的取法有关,如图 7-2 所示.

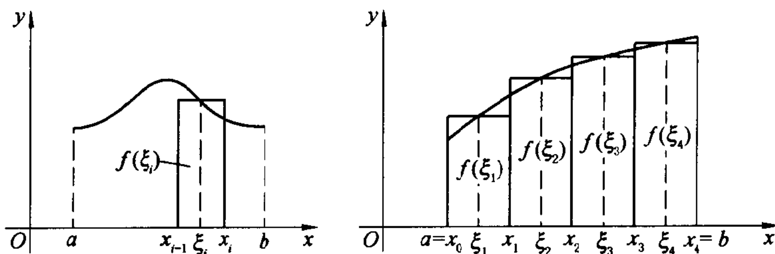


图 7-2

定义 7.1 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数. 若有实数 J,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的任意分划 Δ,以及任取的插点组⟨ξ⟩,均有

$$|S_\Delta(f,\xi) - J| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$在$[a,b]$上是**(Riemann)可积**的,或说 $f(x)$在$[a,b]$上的**(Riemann)定积分存在**,并简记为

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f,\xi) = J, \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J.$$

数值 J 称为 $f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**,并记为

$$J = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

也简称为 $f(x)$从 a 到 b 的定积分(值),a 称为积分**下限**,b 称为积分**上限**.

为方便今后的积分运算,我们引进 $f(x)$从 b 到$a(a<b)$的定积分记为$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$,以及 a 到 a 的积分记为$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x$,并规定它们为

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

显然,这与上述积分定义是协调的.

例 设$f(x)$是$[a,b]$上的常数(函数):$f(x)=A$, $x\in[a,b]$,则$f(x)$在$[a,b]$上是可积的,且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A(b-a).$$

证明 由于对于$[a,b]$的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 以及插入点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$,总有

$$S_\Delta=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=A\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=A(b-a),$$

故易知 $J=A(b-a)$.

定积分的定义是用 ε-δ 的语言描述的,但它不同于曾经学过的序列或函数极限类型.在分划的模 $\|\Delta\|$ 趋于零的过程中,当分划 Δ 取定时,积分和 $S_\Delta(f,\xi)$的值并未完全确定.面对这一新的极限形式,首先必须阐明其极限值即积分(值)的唯一性,才能获得其数学上的明确意义.

定理 7.1 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则其积分值是唯一的.

证明 假定存在 J_1 与 J_2 使得

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta=J_1,\quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta=J_2,$$

则由定义可知,对任给 $\varepsilon>0$,我们有

(1) 存在 $\delta_1>0$,使得对满足 $\|\Delta_1\|<\delta_1$ 的任一分划 Δ_1 和插点组$\langle\xi^{(1)}\rangle$,有

$$|S_{\Delta_1}(f,\xi^{(1)})-J_1|<\frac{\varepsilon}{2};$$

(2) 存在 $\delta_2>0$,使得对满足 $\|\Delta_2\|<\delta_2$ 的任一分划 Δ_2 和插点组$\langle\xi^{(2)}\rangle$,有

$$|S_{\Delta_2}(f,\xi^{(2)})-J_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的任一分划 Δ 和插点组$\langle\xi\rangle$,都有

$$|S_\Delta(f,\xi)-J_1|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |S_\Delta(f,\xi)-J_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知

$$|J_1-J_2|\leqslant|J_1-S_\Delta(f,\xi)|+|S_\Delta(f,\xi)-J_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性,即得 $J_1=J_2$.

现在,我们面临的问题与已学过的极限课题类似,即极限的存在性与寻求极限值. 在定积分的定义中,函数 $f(x)$ 的可积性与积分值 J 的存在性是统一的,但在应用中要求预先知道 J 值是不现实的. 因此,在下文中我们仍将对这两个问题分别展开讨论. 对于前者,有函数可积的充分必要条件,它将使我们认识到许多可积函数;至于后者,Newton-Leibniz 公式则是计算定积分值的主要手段. 不过,此前先来介绍函数可积的必要条件,以便缩小研究范围.

定理 7.2(函数可积的必要条件) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分值为 J,那么对于 $\varepsilon=1$,必存在 $\delta>0$,当 $[a,b]$ 的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $\|\Delta\|<\delta$,且不论插点组 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 如何选取时,均有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<1.$$

下面指出,$f(x)$ 在任一子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都是有界的. 不妨考察 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$. 因为,我们有

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}|-\left|\sum_{i\neq i_0}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<1,$$

也就是说,

$$|f(\xi_{i_0})|<\frac{1}{\Delta x_{i_0}}\left(1+\left|\sum_{i\neq i_0}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|\right).$$

易知对于除 $i=i_0$ 外取定的插点 ξ_i,上式右端是一个定值,而让插点 ξ_{i_0} 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上变动时,由于上式总是成立的,就说明 $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上是有界的. 因此,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

注 有界函数不一定是可积函数.请看下例:

定义在[0,1]上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数;}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

是不可积的.这是因为对于[0,1]的任意的其模充分小的分划 $\Delta:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 来说,总可取两个插点组:

$\langle\xi\rangle$:有理数 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$;

$\langle\tau\rangle$:无理数 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$.

而作出两个 Riemann 和

$$S_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\Delta x_i=1,$$

$$S_\Delta(f,\eta)=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i=0,$$

所以不可能存在实数 J,使得 $|S_\Delta(f,\xi)-J|$ 与 $|S_\Delta(f,\eta)-J|$ 均任意小.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $f(x)$ 在[0,1]上可积,且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$,试证明存在 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$,使得 $f(x)>0,x\in[\alpha,\beta]$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,$\alpha>0$,对 $[a,b]$ 的任一分划 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,以及任意的插点组 $\langle\xi\rangle$,试计算

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Delta x_i)^{1+\alpha}.$$

3. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数,若有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,试证明对任给 $\varepsilon>0$,存在子区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,使得 $f(x)<\varepsilon(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$.

§2 Darboux 上、下和,上、下积分

为了探讨函数的可积性,当然必须考察积分和(数值)的变

动状态与范围.上一节的定理已经告诉我们,只有有界的函数才能研究它的可积性.因此,函数的上、下确界就为控制积分和的动态提供了最佳手段.本节所介绍的 Darboux(1875 年)的工作,使有界函数的可积性获得了简明的判别准则.

2.1 Darboux 上、下和

下文中,我们总是讨论定义在$[a,b]$区间上的有界函数$f(x)$,并记

$$M=M(f)=\sup_{[a,b]}\{f(x)\},$$

$$m=m(f)=\inf_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

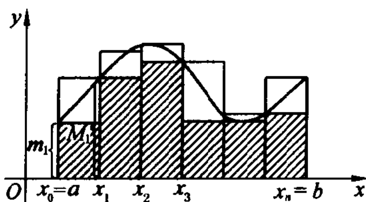


图 7-3

定义 7.2 作$[a,b]$的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,且对 $i=1,2,\cdots,n$,记

$$\begin{cases} M_i=M_i(f)=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}, \\ m_i=m_i(f)=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\} \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则称和式(数值)

$$\overline{S}_\Delta=\overline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\ \underline{S}_\Delta=\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

为$f(x)$(在$[a,b]$上)关于分划 Δ 的 **Darboux 上和与下和**,简称为上和与下和.这一操作避免了原积分和由于函数在插点上值的变化而出现的不确定性.

引理 7.1(积分和与 Darboux 上、下和的关系) 设 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是$[a,b]$的任一分划,则

(1) 对任意的插点组$\langle\xi\rangle$,有$\underline{S}_\Delta\leqslant S_\Delta\leqslant\overline{S}_\Delta$,即

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i;$$

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在插点组$\langle\xi'\rangle$,$\langle\xi''\rangle$,使得

$$\overline{S}_\Delta-\varepsilon<S_\Delta(f,\xi'),\underline{S}_\Delta+\varepsilon>S_\Delta(f,\xi''),$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i') \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + \varepsilon > \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'') \Delta x_i. \tag{①}$$

证明 (1) 显然.

(2) 对于每个$[x_{i-1},x_i]$,由$f(x)$上、下确界的定义可知,存在$\xi_i',\xi_i''\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\begin{cases} M_i - \dfrac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i'), \\ m_i + \dfrac{\varepsilon}{b-a} > f(\xi_i''), \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

对上式乘以Δx_i且从$i=1$到$i=n$求和即得式①.

上述结论说明了上、下和$\overline{S}_\Delta$、$\underline{S}_\Delta$与积分和S_Δ的密切关系,而注意到前者的数值与插点$\langle\xi\rangle$无关,易知对它的研究不仅简便得多,且对廓清积分和的变动范围极为有益.

为了适应积分和$S_\Delta(f)$在$\|\Delta\|\to 0$时的极限过程,还需要对不同分划的上、下和作比较,而引入所谓加细分划的概念.

定义 7.3 设Δ',Δ''是$[a,b]$的两个分划.

(1) 若Δ'的分点必为Δ''的分点,则称Δ''为Δ'的**加细分划**,并记为

$$\Delta'\subset\Delta'' \text{或} \Delta''\supset\Delta'.$$

它表示分点集合的包含关系.

(2) 若Δ^*是合并Δ'与Δ''中全体分点而形成的分划时,则称Δ^*为Δ'与Δ''的合并分划,且记为$\Delta^*=\Delta'\cup\Delta''$. 注意,此时显然有$\Delta^*\supset\Delta',\Delta^*\supset\Delta''$. 这一事实为联络两个不同分划架起了桥梁.

引理 7.2 设Δ'与Δ''是$[a,b]$的两个分划,若$\Delta''\supset\Delta'$且Δ''仅比Δ'多一个分点,则

$$0\leqslant\overline{S}_{\Delta'}-\overline{S}_{\Delta''}\leqslant\|\Delta'\|(M-m),\quad 0\leqslant\underline{S}_{\Delta''}-\underline{S}_{\Delta'}\leqslant\|\Delta'\|(M-m).$$

证明 以第一式为例,不妨设分划为

$$\Delta':a=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0-1}<x_{i_0}<\cdots<x_n=b,$$
$$\Delta'':a=x_0<x_1\cdots<x_{i_0-1}<x'<x_{i_0}<\cdots<x_n=b,$$

即 Δ''中的新分点落在区间(x_{i_0-1},x_{i_0})内. 记

$$M'_{i_0}=\sup_{[x_{i_0-1},x']}\{f(x)\},\quad M''_{i_0}=\sup_{[x',x_{i_0}]}\{f(x)\},$$

易知 $M'_{i_0}\leqslant M_{i_0}$, $M''_{i_0}\leqslant M_{i_0}$. 从而有

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\Delta'}-\overline{S}_{\Delta''}&=\left\{\sum_{i=1}^{i_0-1}M_i\cdot\Delta x_i+M_{i_0}(x_{i_0}-x_{i_0-1})+\sum_{i=i_0+1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i\right\}\\&\quad-\left\{\sum_{i=1}^{i_0-1}M_i\Delta x_i+M'_{i_0}(x'-x_{i_0-1})+M''_{i_0}(x_{i_0}-x')\right.\\&\quad\left.+\sum_{i=i_0+1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i\right\}\\&=M_{i_0}(x_{i_0}-x_{i_0-1})-[M'_{i_0}(x'-x_{i_0-1})\\&\quad+M''_{i_0}(x_{i_0}-x')].\end{aligned}\qquad ②$$

由此立即可知$\overline{S}_{\Delta'}-\overline{S}_{\Delta''}\geqslant 0$.

另一方面,在式②中以 M 代 M_{i_0},以 m 代 M'_{i_0} 与 M''_{i_0},又得

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\Delta'}-\overline{S}_{\Delta''}&\leqslant M(x_{i_0}-x_{i_0-1})-m(x_{i_0}-x_{i_0-1})\\&=(M-m)(x_{i_0}-x_{i_0-1})\leqslant\|\Delta'\|(M-m).\end{aligned}$$

推论 7.1 若 Δ',Δ''是$[a,b]$的两个分划,且 Δ''是由 Δ'添加 k 个新分点而形成的分划,则

$$0\leqslant\overline{S}_{\Delta'}-\overline{S}_{\Delta''}\leqslant k\|\Delta'\|(M-m),$$
$$0\leqslant\underline{S}_{\Delta''}-\underline{S}_{\Delta'}\leqslant k\|\Delta'\|(M-m).$$

推论 7.2 若 Δ'与 Δ''是$[a,b]$的任意两个分划,则$\underline{S}_{\Delta'}\leqslant\overline{S}_{\Delta''}$.

证明 作分划 $\Delta^*=\Delta'\cup\Delta''$,因为 $\Delta^*\supset\Delta'$, $\Delta^*\supset\Delta''$,所以由推论 7.1 知

$$\underline{S}_{\Delta'}\leqslant\underline{S}_{\Delta^*}\leqslant\overline{S}_{\Delta^*}\leqslant\overline{S}_{\Delta''}.$$

2.2 Darboux 上、下积分

上一节的推论表明:分划加细,上和递减,下和递增,而且上

和不会比任一下和小,下和不会比任一上和大.因此,上和的下确界与下和的上确界这两个值,引起了我们的兴趣,这从定积分的面积意义看是很明白的.

定义 7.4(Darboux) 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,对$[a,b]$的一切分划Δ,作相应的上和数集$\{\overline{S}_\Delta\}$与下和数集$\{\underline{S}_\Delta\}$,且记其下、上确界各为

$$\inf_{\Delta}\{\overline{S}_\Delta\}=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,\quad \sup_{\Delta}\{\underline{S}_\Delta\}=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

并各称为$f(x)$在$[a,b]$上的**Darboux 上积分**与**Darboux 下积分**,简称为上、下积分.

根据这一定义以及推论 7.2 易知,对$[a,b]$的任一分划Δ,总有

$$\underline{S}_\Delta\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{S}_\Delta.$$

下述重要结论表明,上(下)和与上(下)积分的关系还可用极限形式来描述.

定理 7.3(Darboux) 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,则对任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当$[a,b]$的分划Δ满足$\|\Delta\|<\delta$时,有

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x+\varepsilon>\overline{S}_\Delta,\quad \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\varepsilon<\underline{S}_\Delta,$$

也写成

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\overline{S}_\Delta=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,\quad \lim_{\|\Delta\|\to 0}\underline{S}_\Delta=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 以下积分为例,且不妨假定$f(x)$在$[a,b]$上不是常数,仍记M,m为$f(x)$在$[a,b]$上的上、下确界.根据下积分的定义可知,对任给的$\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的分划

$$\Delta':a=x_0<x_1<\cdots<x_{n_0}=b,$$

使得

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\underline{S}_{\Delta'}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取 δ：$0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{2n_0(M-m)}$，并对任一满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的 $[a,b]$ 的分划 Δ，再作合并分划 $\Delta^*=\Delta'\cup\Delta$，易知分划 Δ^* 是 Δ 的分点再添加至多 n_0 个新分点而成. 从而根据前述推论 7.1 可得

$$0\leqslant\underline{S}_{\Delta^*}-\underline{S}_{\Delta}\leqslant n_0\|\Delta\|(M-m)$$

$$<n_0\delta(M-m)<\frac{n_0(M-m)}{2n_0(M-m)}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到 $\underline{S}_{\Delta'}\leqslant\underline{S}_{\Delta^*}$，我们有

$$0\leqslant\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{S}_{\Delta}=\left(\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{S}_{\Delta'}\right)+(\underline{S}_{\Delta'}-\underline{S}_{\Delta})$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+(\underline{S}_{\Delta^*}-\underline{S}_{\Delta})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

推论 7.3 对 $[a,b]$ 上的有界函数，其上、下积分相等的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任一满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分划 Δ，均有 $\overline{S}_{\Delta}-\underline{S}_{\Delta}<\varepsilon$.

证明 充分性可由

$$\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\overline{S}_{\Delta}-\underline{S}_{\Delta}<\varepsilon$$

直接导出.

现证必要性. 根据定理 7.1 可知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任一满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分划 Δ，有

$$\underline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x-\varepsilon<\underline{S}_{\Delta}\leqslant\overline{S}_{\Delta}<\overline{\int_a^b}f(x)\mathrm{d}x+\varepsilon.$$

从而在上、下积分相等的前提下，易得 $\overline{S}_{\Delta}-\underline{S}_{\Delta}<2\varepsilon$.

思考练习 解答下列问题：

1. 试写出定义在 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数的上、下积分.

2. 试求函数 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上的下积分.（提示：注意 $x_k<(x_k+x_{k+1})/2$）

3. 设 $f\in C([0,1])$. 若存在常数 l，使对 $[0,1]$ 的任一分划 Δ，都有 $\underline{S}_{\Delta}=l$，试证明 $f(x)\equiv l$.（取分点 0,1，得 $l=m$）

§3 函数可积的充分必要条件，可积函数类

3.1 函数可积的充分必要条件

有了 Darboux 关于上、下积分的工作，我们就可以给出关于有界函数可积性的充分必要条件，这些条件较为形象且便于应用，对确定可积函数类型提供了方便.

为方便计，记$[a,b]$上所有可积函数之全体为$R([a,b])$，$f\in R([a,b])$表示$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数.

定理 7.4 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，则 $f\in R([a,b])$当且仅当其上、下积分相等. 此时有

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

证明 充分性. 假设$f(x)$的上、下积分相等，且等于J，则由推论 7.3 可知，对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$[a,b]$的任一分划Δ满足$\|\Delta\|<\delta$时，有$\overline{S}_\Delta-\underline{S}_\Delta<\varepsilon$. 注意到不等式

$$\underline{S}_\Delta\leqslant J\leqslant\overline{S}_\Delta,\ \underline{S}_\Delta\leqslant S_\Delta\leqslant\overline{S}_\Delta,$$

(S_Δ表示积分和)立即可知$|S_\Delta-J|<\varepsilon$. 这说明 $f\in R([a,b])$，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=J.$$

式①成立.

必要性. 假设 $f\in R([a,b])$.

因为 $f\in R([a,b])$，所以对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当$[a,b]$的分划Δ满足$\|\Delta\|<\delta$时，对任一积分和$S_\Delta(f,\xi)$都有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}<S_\Delta(f,\xi)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到积分和与上、下和的关系可知，我们能选取特定的插点组$\langle\xi'\rangle$，$\langle\xi''\rangle$，使得

$$\overline{S}_\Delta-\frac{\varepsilon}{2}<S_\Delta(f,\xi'),\ \underline{S}_\Delta+\frac{\varepsilon}{2}>S_\Delta(f,\xi'').$$

合并上述两种不等式,得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\varepsilon<\underline{S}_\Delta<\overline{S}_\Delta<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\varepsilon.$$

由此即知$\overline{S}_\Delta-\underline{S}_\Delta<\varepsilon$. 这说明$f(x)$的上、下积分相等,又由充分性的证明中可知式①成立.

上述定理表明,上、下积分相等与积分的存在是等价的,上、下积分相等也可作为定积分存在的定义. 这从几何上看是很好理解的:记$[a,b]$上非负函数$f(x)$形成的下方图形面积为S,则对任一$[a,b]$的分划Δ,总有$\underline{S}_\Delta\leqslant S\leqslant\overline{S}_\Delta$.

现在对一切分划Δ,在上式左、右端取其上、下确界,可得

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x\leqslant S\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

在上式等号成立的情形下,其值就应为S.

例 设$f\in R([a,b])$,且记$m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in[a,b]$,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a). \qquad ②$$

证明 只需注意到,对$[a,b]$的任一分划Δ,均有

$$m(b-a)\leqslant\underline{S}_\Delta(f)\leqslant S_\Delta(f)\leqslant\overline{S}_\Delta(f)\leqslant M(b-a)$$

即可.

特别,对非负可积函数$f(x)$,必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

推论 7.4(Riemann) 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数.

(1) $f\in R([a,b])$的充分必要条件是:对任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得当分划Δ满足$\|\Delta\|<\delta$时,有$\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon$.

(2) $f\in R([a,b])$的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的分划Δ,使得

$$\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon.$$

证明 (1) 直接引用推论 7.3.

(2) 只要注意上、下和与上、下积分之间的关系即可.

注 如果对于$[a,b]$的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,引用$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上振幅符号:

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_i(f)=M_i-m_i \\ &= \sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in[x_{i-1},x_i]\} \\ &\quad (i=1,2,\cdots,n),\end{aligned}$$

那么上述充分必要条件中的不等式又可写为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\left(\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\overline{S}_\Delta-\underline{S}_\Delta\right)<\varepsilon. \qquad ③$$

显然,为使式③成立,理应在振幅 ω_i 与 Δx_i 两个方面上下功夫. 例如:我们能使每个 ω_i 都充分地小,这当然是最理想的情形,因为此时,小区间 Δx_i 长度的总和也就是 $b-a$,所以式③成立.

3.2 可积函数类

例1 若 $f\in C([a,b])$,则 $f\in R([a,b])$.

证明 闭区间$[a,b]$上的连续函数有下述性质:

(1) 有界;

(2) 一致连续. 即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当$[a,b]$中有两点 ξ,η 且满足 $|\xi-\eta|<\delta$ 时,就有 $|f(\xi)-f(\eta)|<\varepsilon$.

(3) $f(x)$可以取到最大、最小值. 振幅就是其最大、最小值的差.

因此,可作$[a,b]$的满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使得在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$上,有

$$\omega_i=M_i-m_i<\varepsilon(i=1,2,\cdots,n).$$

这就满足了推论 7.4 的条件,故 $f\in R([a,b])$.

为使式③成立,上例是从 ω_i 下手的,即让所有 ω_i 项皆小于 ε,这正好相当于一致连续的意思. 那么,是否可以从 Δx_i 下手呢? 即让分点如此之多;使每个 Δx_i 皆小于 ε,使式③成立. 问题不那么简单,这是因为此时 ω_i 相加的项数可无限增多的. 不

过,在特定的情况下,如 ω_i 可直接表出而被化解时,这一设想仍可取.

例 2 若$f(x)$是$[a,b]$上的单调函数,则 $f\in R([a,b])$.

证明 不妨假定$f(x)$在$[a,b]$上递增,且不是常数. 它当然是有界的:

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b),\ x\in[a,b].$$

对任给的 $\varepsilon>0$,作$[a,b]$的分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ \|\Delta\|<\varepsilon/[f(b)-f(a)].$$

注意到$f(x)$的递增性,在$[x_{i-1},x_i]$上有

$$M_i=f(x_i),m_i=f(x_{i-1})\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由此可知 $\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})\quad(i=1,2,\cdots,n)$,且有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i\\ &<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\ &=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon.\end{aligned}$$

即得所证.

当然,为使式③成立,上述两类函数均有特殊性,着眼处过于极端. 读者或许已经悟到,让 ω_i 与 Δx_i 相互照顾,即在某些 ω_i 不能充分小处,其相应的子区间 Δx_i 的总长度却可充分小,此时可预见式③仍能成立.

推论 7.5(Du Bois Reymond[①]) $[a,b]$上有界函数可积的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0,\sigma>0$,存在分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,其相应于 $\omega_i\geqslant\varepsilon$ 的子区间 Δx_i 的长度的总和小于 σ.

证明 对$[a,b]$的分划 Δ,作分解

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{(A)}\omega_i\Delta x_i+\sum_{(B)}\omega_i\Delta x_i,\tag{④}$$

① 杜·布·雷蒙(1831—1889),德国数学家.

其中 $\sum\limits_{(A)}$ 表示对 $\omega_i<\varepsilon$ 所在子区间指标 i 求和，$\sum\limits_{(B)}$ 表示对 $\omega_i\geqslant\varepsilon$ 所在子区间指标 i 求和.

充分性. 记 $\Omega=M-m$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅，由题设知，对 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 以及 $\sigma=\frac{\varepsilon}{2\Omega}$，存在分划 Δ，且知

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{(A)}\Delta x_i+\Omega\sum_{(B)}\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\Omega\cdot\sigma<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这说明 $f\in R([a,b])$.

必要性. 假定 $f\in R([a,b])$，则由可积性条件知，对任给的 $\varepsilon>0,\sigma>0$(注意 $\sigma\varepsilon$ 仍是任给的)，存在分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n<b$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\sigma\varepsilon.$$

注意到不等式 $\varepsilon\sum\limits_{(B)}\Delta x_i\leqslant\sum\limits_{(B)}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\sigma\varepsilon$，立即可知

$$\sum_{(B)}\Delta x_i<\sigma.$$

这就是说，相应于 $\omega_i\geqslant\varepsilon$ 的子区间长度总和小于 σ.

例3 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数}, x=0;\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p\text{ 与 }q\text{ 是互素正整数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上是可积的.

证明 对任给 $\varepsilon>0,\sigma>0$，易知在 $[0,1]$ 中满足 $\frac{1}{q}>\varepsilon\,(q<\varepsilon)$ 的有理数 $\frac{p}{q}$(p 与 q 是互素的正整数)只有有限个，不妨记为

$$r_1,r_2,\cdots,r_k\quad(k=k(\varepsilon)).$$

现在，可作 $[0,1]$ 的分划 Δ，满足 $\|\Delta\|<\frac{\sigma}{k}$，且使得上述 k

个有理数均含于小区间的内部.此时,若分划 Δ 中的小区间不含有 $r_i(i=1,2,\cdots,k)$,则$f(x)$在其上的振幅为$\frac{1}{q}-0<\varepsilon$,而使$f(x)$在其上振幅大于 ε 的子区间必是含有 $r_i(i=1,2,\cdots,k)$的小区间,这样的小区间至多有 k 个,其长度总和小于 $k\|\Delta\|<k\cdot\frac{\sigma}{k}=\sigma$,即得所证.

推论 7.6 若定义在$[a,b]$上的有界函数只有有限个不连续点,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明 假定$f(x)$在$[a,b]$上有 p 个不连续点,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in[a,b]$.现在,对任给 $\varepsilon>0$,进行如下操作:

(1) 在$[a,b]$中作 p 个小开区间,使这 p 个不连续点含于其内部,而这 p 个小区间长度总和小于$\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$.

(2) 在$[a,b]$中除去上述 p 个小区间后,剩下至多还有 $p+1$ 个小闭区间,对其中每个小闭区间上,由$f(x)$的连续性,可再对其作分划,使在其上的上、下和之差均小于$\frac{\varepsilon}{2(a-b)}$.

我们将(1)中的 p 个小区间以及(2)中的 $p+1$ 个小区间的分划合成$[a,b]$的分划 Δ,易知

$$
\begin{aligned}
\sum_{\Delta}\omega_i\Delta x_i &= \sum_{(1)}\omega_i\Delta x_i+\sum_{(2)}\omega_i\Delta x_i \\
&<(M-m)\sum_{(1)}\Delta x_i+(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\
&<(M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

其中,$\sum\limits_{(1)}$表示对(1)中的 p 个小区间求和,$\sum\limits_{(2)}$表示对(2)中的小区间求和.即得所证.

注 1. 根据推论 7.6 的证明过程不难推知,如果定义在$[a,b]$上的两个函数$f(x)$与$g(x)$,它们只在$[a,b]$中的一个点上取值不同,而且 $f\in R([a,b])$,那么$g(x)$在$[a,b]$上也可积,且

它们的积分值相同.

2. 根据推论 7.6 又不难推知. 对于$[a,b]$上定义的有界函数,若对任意的 $\delta>0$, $f(x)$在$[a+\delta,b]$上都可积,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

例 4 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$在$[0,1]$上可积,其中 A 是任意一个常数.

上述例中的值 A 不影响$f(x)$的可积性与积分值. 因此,$f(x)$上$[0,1]$上的积分往往写成$\int_0^1\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$,而不给出被积函数在 $x=0$ 处的值. 类似地,又如

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}, & x\neq 0,\end{cases}$$

在$[0,1]$上连续,故可积,其积分值写成

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x.$$

思考练习 试证明下列命题:

1. 若 $f\in R([a,b])$,则对$[a,b]$作等分划

$x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$, $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$. $(n=1,2,\cdots)$必有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 若 $f\in R([a,b])$,则函数

$$h(x)=\inf_{[a,x]}\{f(t)\},\quad H(x)=\sup_{[a,x]}\{f(t)\}$$

是$[a,b]$上的可积函数.

3. $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$,其中 $R(x)$是 Riemann 函数.

4. 函数$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},x=0,\\ a_n, & x=\dfrac{m}{n}(\text{既约分数})\end{cases}$

在$[0,1]$上可积,其中数列$\{a_n\}$满足$a_n\to 0(n\to\infty)$.

5. $f(x)=\ln x\cdot\ln(1+x)$在$[0,1]$上可积.(提示:$f(x)\to 0$ $(x\to 0+)$)

6. 设$f\in R([a,b])$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left[1+f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\right]=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

$\left(\text{提示: 应用不等式} |x-\ln(1+x)|\leqslant x^2\left(|x|<\frac{1}{2}\right)\text{, 以及}\right.$ $\left.\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)$

7. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,若存在实数J,使得对$[a,b]$的任一分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$\xi_i=x_{i-1}$或$x_i(i=1,2,\cdots,n)$,总存在极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=J.$$

则$f\in R([a,b])$.

8. 若定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$只有有限个第一类间断点(其余的点皆为$f(x)$的连续点),则$f\in R([a,b])$.

§ 4　微积分基本定理、定积分的基本性质

至此,大家已经知道多种可积函数类,那么如何求出定积分的值呢?按定义(求和式极限)较繁难且走不远的.下面所介绍的 Newton-Leibniz 公式,对此提供了极大的方便.

I. Newton 是经典力学的奠基人,对物体的位移运动有着深刻的理解.他认识到变速运动(以直线运动为例)物体的速度$v(t)$与位移距离$s(t)$之间的内在联系:

$$s'(t)=v(t),\quad \int_{t_0}^{t_1}v(t)\mathrm{d}t=s(t_1)-s(t_0).$$

也就是说,将充分小的时间间隔内的距离积累成从 t_0 到 t_1 时段内的总距离:

$$\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t_i \sim s(t_1)-s(t_0).$$

他把这一思想运用到坐标平面中曲线在$[a,b]$上的积分计算,让曲线变化并视为某物体运动速度的变化,从而悟出了一般的积分计算公式.用现代的语言来说,那就是:$f(x)$在$[a,b]$上的定积分等于$f(x)$的原函数在上、下限上的值的差.(德国数学家 Leibniz 从几何的角度作出了同一结论,不再陈述)

4.1 Newton-Leibniz 公式

定理 7.5(Newton-Leibniz 公式) 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,且在$[a,b]$上有原函数$F(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \underline{\underline{\mathrm{def}}} F(x)\Big|_a^b.$$

(下文中,简称此式为 N-L 公式)

证明 由 $f\in R([a,b])$可知,对$[a,b]$的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,以及任意的插点组 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

现在,由微分中值公式特别取插点组如下:

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i')\Delta x_i=f(\xi_i')\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

由此可知

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=F(b)-F(a). \qquad ①$$

从而我们有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i=F(b)-F(a).$$

注 1. 注意到$f(x)$是$f'(x)$的原函数,故当 $f'\in R([a,b])$时,N-L 公式可写为

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

2. 上述定理并不是说可积函数一定有原函数,而是说如果存在原函数,那么可用来计算定积分的值.例如

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

在[0,2]上可积,但在[0,2]上不存在原函数.

此外,即使有原函数存在的函数也不一定可积.例如在[-1,1]上的函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\end{cases}$$

是函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ -\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}+2x\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$$

在[-1,1]上的原函数,但 $f\overline{\in}R([-1,1])$.

3. N-L 公式也称为微积分基本定理,由此可见它在整个微积分学中的地位和作用.这一公式把原先在复杂的定积分定义中的积分值计算化为求原函数的问题,这就为普及微积分打开了大门.

大家在第一册中已经学习过许多求原函数的方法,因此在这里不再过多列举直接套用公式的计算.值得一提的是,我们倒可以利用 N-L 公式来计算某些"类积分"和式的极限.

例 1 设 $0<p<q$,则 $\ln\dfrac{q}{p}\leqslant\dfrac{q-p}{p}$.

证明 因为函数$\dfrac{1}{x}$在$[p,q]$上连续,从而可积,且 $\ln x$ 是$\dfrac{1}{x}$在$[p,q]$上的原函数,所以由 N-L 公式得

$$\int_p^q\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln q-\ln p=\ln\frac{q}{p}.$$

注意到$\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{p}(p\leqslant x)$,故

$$\ln\frac{q}{p}=\int_p^q\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant\frac{q-p}{p}.$$

例 2 设$f(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}(0<x\leqslant 1)$，$f(0)=0$，则$F(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}(0<x\leqslant 1)$以及$F(0)=0$是$f(x)$的原函数，从而有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sin 1.$$

例 3 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+i^2}$.

解 若将上式化为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}.$$

易知上式右端正是连续函数$\dfrac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$上针对n等分后并取函数在子区间$\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$右端点上的值作出的积分和. 从而立即得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}.$$

例 4 求$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$，其中

$$I_n=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}+\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\dfrac{n\pi}{n}}{n+\dfrac{n}{n}}.$$

解 乍看$I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{n+\dfrac{k}{n}}$，有点像函数$\sin x$在$[0,\pi]$上的积分和：

$$\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n},$$

但实际上不是，其不同之处就在乘积因子$\dfrac{1}{\left(n+\dfrac{k}{n}\right)}$. 因此，我们

要把它化去.为此,运用放大缩小的方法:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}.$$

注意到上式右端在 $n\to\infty$ 时有极限值 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$,而对左端又有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\frac{\pi}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\frac{\pi}{n}\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而得 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

思考练习 解答下列问题:

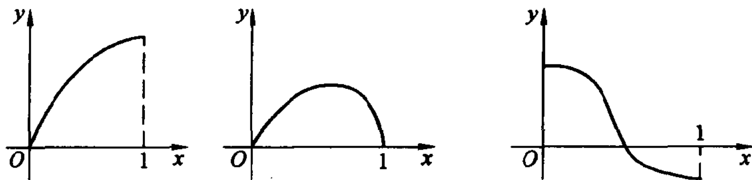
1. 设 $f\in R([0,1])$,且有

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

试求 $f(x)$.(提示:在等式两端作[0,1]上的定积分,可求出其积分值)

2. 求定积分 $\int_a^b x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$ 之值.(提示:原函数为 $\frac{2}{5}|x|^{\frac{5}{2}}$)

3. 设 $f(x)$ 在[0,1]上可导,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,试问下列三个图形各表示三个函数:$f(x)$,$f'(x)$,$F(x)$ 中的哪一个?



(第 3 题)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且 $f'\in R([a,b])$,试证明存在正数

M 以及 α:$0<\alpha<1$,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\quad x,y\in[a,b].$$

$$\left(f(x)-f(y)=\int_y^x f'(t)\mathrm{d}t,a\leqslant x,y\leqslant b\right)$$

4. 设 $f\in C^{(1)}([0,1])$,试证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x+\frac{k}{n^2+k^2}\right)-f(x)\right]=f'(x)\frac{\ln 2}{2}(0\leqslant x\leqslant 1).$$

$$\left(\text{提示: } f\left(x+\frac{k}{n^2+k^2}\right)-f(x)=f'\left(x+\frac{k\theta}{n^2+k^2}\right)\left[\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]\cdot\frac{1}{n}=f'(x)\cdot\frac{\frac{k}{n}}{\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n}+\left[f'\left(x+\frac{k\theta}{n^2+k^2}\right)-f'(x)\right]\cdot\left(\frac{k}{n^2+k^2}\right)\right)$$

4.2 定积分的基本性质

大家知道,即使一个函数的原函数存在且是初等函数,也不是都能简便地表达出来.因此,为了探讨函数的可积性以及估算定积分的值,还应充分利用定积分的各种性质.

定理 7.6(积分的线性性质)

(1) 设 $f\in R([a,b])$,$g\in R([a,b])$,则 $f+g\in R([a,b])$,且有

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f\in R([a,b])$,c 是常数,则 $cf\in R([a,b])$,且有

$$\int_a^b[cf(x)]\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 由题设知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的 $[a,b]$ 的任一分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

以及任意的插点组:$\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x_i-\left\{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right\}\right|<\varepsilon.$$

由此即知

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 由题设知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $\|\Delta\|<\delta$的$[a,b]$的任一分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

以及任意的插点组:$\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

从而也有(不妨设 $c\neq 0$)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i-c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<|c|\varepsilon.$$

这说明存在着极限等式

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得所证.

定理 7.7(积分的保序性) 若 $f\in R([a,b])$, $g\in R([a,b])$,且有$f(x)\leqslant g(x)$, $x\in[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 注意到$f(x)-g(x)\geqslant 0$,即得$\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\geqslant$

0. 由积分的线性性质即得所证.

例 1 设$f(x)$在$[a,b]$上可微,且有

$$f(a)=0,f'(x)\leqslant M\ (a\leqslant x\leqslant b),$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

证明 由微分中值公式可知

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\leqslant M(x-a),$$

其中 $a<\xi<x,a<x\leqslant b$. 从而有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

例 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明 引用公式

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=2\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos 2kx\right)$$

(约定 $x=0$ 时,左端$=2n+1$),可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos 2kx\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\sum_{k=1}^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2kx\mathrm{d}x.$$

注意到 $\cos 2kx$ 的原函数是$\frac{\sin 2kx}{2k}$,就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2k}\sin\left(2k\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2k}\sin(2k\cdot 0)=0.$$

从而得到

$$\sum_{k=1}^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2kx\mathrm{d}x=0.$$

即得所证.

例 3 设$f(x)$是$[a,b]$上的非负连续函数,记

$$I_n=\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}},\quad M=\max_{[a,b]}\{f(x)\},$$

则 $I_n\to M(n\to\infty)$.

证明 不妨假定 $f(x_0)=M, x_0\in(a,b)$, 则对任给的 $\varepsilon: 0<\varepsilon<M$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$M-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

根据$f(x)$的非负性和保序性可知

$$2\delta(M-\varepsilon)^n\leqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[f(x)]^n\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x\leqslant M^n(b-a).$$

这就导出不等式

$$\left(\frac{2\delta}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)\leqslant I_n\leqslant M.$$

注意到$\left[\frac{2\delta}{b-a}\right]^{\frac{1}{n}}\to 1(n\to\infty)$, 我们有 $M-\varepsilon\leqslant\varliminf_{n\to\infty}I_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}I_n\leqslant M$. 从而由 ε 的任意性, 可知

$$M\leqslant\varliminf_{n\to\infty}I_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}I_n=M.$$

即得所证.

定理 7.8(积分区间的可加性) 设 $a<c<b$, 则 $f\in R([a,b])$的充分必要条件是: $f\in R([a,c])$以及 $f\in R([c,b])$. 此时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

证明 必要性. (1) 按题设知, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$的分划 Δ, 使得

$$\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon. \qquad ②$$

这里不妨假定 $x=c$ 是 Δ 的分点(否则考虑分划 $\Delta'=\Delta\cup\{c\}$, 且式②仍成立).

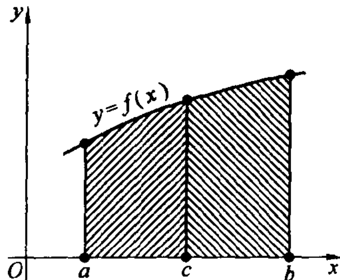


图 7-4

记 Δ_1,Δ_2 为 Δ 的分点落在

$[a,c],[c,b]$中所形成的分划,显然有

$$\overline{S}_{\Delta}(f)=\overline{S}_{\Delta_1}(f)+\overline{S}_{\Delta_2}(f),\underline{S}_{\Delta}(f)=\underline{S}_{\Delta_1}(f)+\underline{S}_{\Delta_2}(f).$$

从而由式②可知

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f)-\underline{S}_{\Delta_1}(f)<\varepsilon,\ \overline{S}_{\Delta_2}(f)-\underline{S}_{\Delta_2}(f)<\varepsilon.$$

这说明 $f\in R([a,c]),f\in R([c,b])$.

(2) 对于$[a,b]$的任一以点 $x_{i_0}=c$ 为分点的分划

$$\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0}<\cdots<x_n=b.$$

以及任意的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,均有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{i_0}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i_0+1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad ③$$

而由(1)知,$f\in R([a,c]),f\in R([c,b])$,故在式③中令 $\|\Delta\|\to 0$,即得式①.

充分性. 由(1)可知,只需指出 $f\in R([a,b])$即可. 按题设,对任给 $\varepsilon>0$,存在$[a,c]$的分划 Δ_1,$[c,b]$的分划 Δ_2,使得

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f)-\underline{S}_{\Delta_1}(f)<\frac{\varepsilon}{2},\ \overline{S}_{\Delta_2}(f)-\underline{S}_{\Delta_2}(f)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而存在$[a,b]$的分划 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$,使得

$$\overline{S}_{\Delta}(f)-\underline{S}_{\Delta}(f)=\overline{S}_{\Delta_1}(f)+\overline{S}_{\Delta_2}(f)-\underline{S}_{\Delta_1}(f)-\underline{S}_{\Delta_2}(f)<\varepsilon.$$

即得所证.

注 实际上,只要式①中的三个积分都存在,那么不论 a,b 与 c 的大小次序如何,式①总成立. 例如对 $c<b<a$ 的情形,因为我们有

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,$$

所以由移项可知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 4 设$f(x)$是$[a,b]$上的非负连续函数,若有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则$f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$.

证明 反证法.假定存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)>0$(对于 $f(a)>0$ 或 $f(b)>0$,可类似证明),则取 $\varepsilon=\frac{f(c)}{2}>0$,由 $f(x)$ 的连续性可知,存在 $\delta>0$,使得

$$f(x)>\frac{f(c)}{2},\quad x\in(c-\delta,c+\delta)\subset(a,b).$$

从而可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{f(c)}{2}\mathrm{d}x=\delta f(c)>0,\end{aligned}$$

导致矛盾,即得所证.

定理 7.9(绝对值的可积性) 若 $f\in R([a,b])$,则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积,且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 首先,由题设知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

注意到不等式 $||f(x)|-|f(y)||\leqslant|f(x)-f(y)|$,可知在同一区间上,$|f(x)|$ 的振幅不超过 $f(x)$ 的振幅.从而得知

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(|f|)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

这说明 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

其次,由不等式 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|,\ x\in[a,b]$ 可知

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

即得所证.

定理 7.10(乘积可积性) 设 $f\in R([a,b])$,$g\in R([a,b])$,

则 $f \cdot g \in R([a,b])$.

证明 不妨假定 $|f(x)| \leqslant M, |g(x)| \leqslant M, x \in [a,b]$,从而对任意的 $x, y \in [a,b]$,有不等式

$$\begin{aligned}&|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\\ \leqslant &|f(x)-f(y)||g(x)|+|f(y)||g(y)-g(x)|\\ \leqslant &M|f(x)-f(y)|+M|g(x)-g(y)|.\end{aligned}$$

由此可知,在$[a,b]$的任一子区间 I 上的振幅有下述关系:

$$\omega_I(fg) \leqslant M\omega_I(f)+M\omega_I(g).$$

现在,根据$f(x)$,$g(x)$的可积性知道,对任给的 $\varepsilon>0$,存在分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

从而我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(fg)\Delta x_i<M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}+M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

即得可证.

例5 设 $f \in R([a,b])$, $g \in R([a,b])$,则有(Cauchy-Schwarz 不等式)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad ④\end{aligned}$$

证明 首先,由定理 7.10 可知,式④左、右端积分均存在.其次,记

$$A=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x, \ B=\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x, \ C=\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

并考察积分

$$\int_a^b [t|f(x)|-|g(x)|]^2\mathrm{d}x=At^2-2Bt+C.$$

因为上式对一切 $t \in (-\infty,\infty)$ 皆非负,所以必有

$$4B^2\leqslant 4AC \quad 或 \quad B^2\leqslant AC.$$

由此即知式④成立.

注 若 $f,g\in C([a,b])$,则式④中等号成立当且仅当 $f(x)=cg(x)$. (c 是常数,$x\in[a,b]$)

例 6(Riemann-Lebesgue 引理) 设 $f\in R([a,b])$,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证明 因为 $f\in R([a,b])$,所以对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 的分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨假定 $|f(x)|\leqslant M, x\in[a,b]$,则当 $\lambda>\frac{4nM}{\varepsilon}$ 时,我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)+f(x)-f(x_i)]\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\sum_{i=1}^n|f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\
&+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_i)||\sin\lambda x|\mathrm{d}x \\
\leqslant& M\sum_{i=1}^n\frac{|\cos\lambda x_i-\cos\lambda x_{i-1}|}{\lambda}+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_i(f)\mathrm{d}x \\
\leqslant&\frac{M}{\lambda}\sum_{i=1}^n 2+\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{2nM}{\lambda}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

即得所证.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设 $f\in R([a,b])$ 且 $f(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$. 若 $x_0\in[a,b]$ 是

$f(x)$的连续点且$f(x_0)>0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

2. 设有定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$,则在$[a,b]$上$|f(x)|$与$f^2(x)$的可积性等价.

3. 设$f\in R([0,1])$,则

$$\left(\int_0^1 f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^1 f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

4. 设$f(x)$在$[0,2]$上二次可导,且有$f(1)=0$,$|f''(x)|\leqslant M(0\leqslant x\leqslant 2)$,则

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{3}.$$

(提示:将$f(x)$在$x=1$处展成 Taylor 公式)

5. 设$f\in R([0,1])$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=0$.

6. 设$f\in C([0,1])$,则$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$.

(提示:$n\int_0^1 x^n f(1)\mathrm{d}x\to f(1)(n\to\infty)$)

7. 设$f\in C([0,\pi])$,且有

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0,$$

则$f(x)$在$(0,\pi)$内至少有两个零点(考察$f(x)\sin(x-x_0)$).

8. 设$f(x)$,$g(x)$均是$[a,b]$上的递增(减)函数,则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(提示:利用$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$,再依次对$x$积分,对$y$积分即可得证)

§5 变限积分,原函数存在的充分条件

设$f\in R([a,b])$,则对于任意取定的$x:a\leqslant x\leqslant b$,有$f\in$

$R([a,x])$. 因此,积分

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ \ x\in[a,b].$$

的值随上限 x 的值而唯一确定,它是 x 的函数,我们称它为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的变上限积分. 这是一个以新的面貌出现的函数.

当然,在许多情形下,它也只是已知函数的不同表示而已.

如根据导数关系 $\frac{\mathrm{d}\ln t}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}$, $t\in(0,\infty)$. 可知

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln x-\ln 1=\ln x\ \ (x>0),$$

即自然对数函数是如上函数 $\frac{1}{t}$ 的变上限积分.(顺便指出,以这种方式作为对数函数的定义,也有许多方便之处)

若 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上可积函数 $f(x)$ 的一个原函数,则根据 N-L 公式可得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a),\ \ x\in[a,b]. \qquad ①$$

由此知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F'(x)=f(x),\ \ x\in[a,b].$$

因此在这种情形下,$f(x)$ 的变上限积分是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,且按第六章的记法,可以写成

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C,\ \ x\in[a,b].$$

注意,这一公式只是在 f 具有原函数的前提下才成立,而我们已熟知一个事实:可积函数不一定具有原函数. 此外,企图在式①中以不同的 a 值来获得所有的原函数也是不行的.

那么,究竟在什么条件下,一个函数必有原函数存在呢? 下面给出一个充分条件.

定理 7.11 设 $f\in R([a,b])$,且在点 $x_0\in[a,b]$ 处连续,则其变上限积分

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \ (a\leqslant x\leqslant b)$$

在点 $x=x_0$ 处可微,且其导数等于 $f(x_0)$.(当 x_0 是端点 a 或 b 时是指右、左导数)

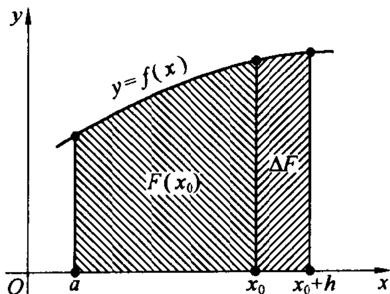


图 7-5

证 明 记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,且不妨讨论它在 $x_0\in(a,b)$处的右导数.

首先取 $h:0<h<b-x_0$,因为有

$$F(x_0+h)=\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=F(x_0)+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

所以其差商$\frac{\Delta F}{h}=\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$满足

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|$$

$$=\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t.$$

其次,根据$f(x)$在点 x_0 处的连续性,可知对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad t\in[a,b]\text{且 } x_0\leqslant t<x_0+\delta.$$

现在取 $\delta_1=\min\{b-x_0,\delta\}$,就有

$$\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t<\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon h,\quad 0<h<\delta_1.$$

从而又可得差商的估计式:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|<\varepsilon, 0<h<\delta_1.$$

这说明

$$F'_+(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).$$

同理可证得 $F'_-(x)=f(x_0)$.

推论 7.7 若 $f\in C([a,b])$,则其变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),\quad x\in[a,b].$$

注 1. 连续函数$f(t)$的变上限不定积分的微分公式也可写为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

2. $[a,b]$上可积但不连续的函数$f(x)$也可能有原函数:$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 见本章注记.

推论 7.8 设 $f\in C([a,b])$,且有定义在$[c,d]$上的可微函数$\varphi(x),\psi(x)$,满足

$$a\leqslant\varphi(x)\leqslant b,\quad a\leqslant\psi(x)\leqslant b,\quad x\in[c,d],$$

则函数

$$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[c,d]$$

在$[c,d]$上可微,且有(看成复合函数)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f[\psi(x)]\psi'(x)-f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

(试问当 $f\in R([a,b])$且有原函数时,上述公式还成立吗?)

一个函数只满足可积条件,其变上限积分不一定可微.虽然如此,下一结论指出,变限积分总是连续函数.

定理 7.12 若 $f\in R([a,b])$,则其变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ $(x\in[a,b])$ 在$[a,b]$上一致连续.(实际上,有 $f\in \mathrm{Lip}1$)

证明 由题设知,存在正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in$

$[a,b]$. 现在令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b],$$

因为对 $x_1,x_2\in[a,b]$，且 $x_1<x_2$，有

$$|F(x_2)-F(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant M|x_2-x_1|,$$

所以对任给 $\varepsilon>0$，只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，而有

$$|F(x_2)-F(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|<\varepsilon,\ |x_2-x_1|<\delta.$$

即得所证.

推论 7.9 若 $f\in R([a,b])$，则

$$\lim_{\delta\to0+}\int_{a+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0+}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

推论 7.10 设 $f\in R([a,b])$，且在开区间 (a,b) 上 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$.

(1) 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$；

(2) 若在点 a,b 上有 $\lim\limits_{x\to a+}F(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-}F(x)=B$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=B-A=[F(b-)-F(a+)].$$

证明 (1) 只需注意，此时式①仍成立.

(2) 作函数

$$F_1(x)=\begin{cases}A, & x=a;\\ F(x), & a<x<b;\\ B, & x=b.\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 从而由(1)知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=B-A=F(b-)-F(a+).$$

例 1 计算定积分 $I=\int_{-1}^2\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 在 $x\neq0$ 时，易知

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

这说明在$[-1,0)$,$(0,2]$上,$\frac{1+x^2}{1+x^4}$的原函数之一是

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}.$$

但因我们有

$$F(0+)=\lim_{x\to0+}F(x)=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad F(0-)=\lim_{x\to0-}F(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

所以根据推论 7.10 可知

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{0}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\\&=F(0-)-F(-1)+F(2)-F(0+)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}+\pi\right).\end{aligned}$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$.

解 也可应用 L'Hôpital 法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{1}=\lim_{x\to0}\cos x^2=1.$$

例 3 设 $f\in C([a,b])$. 若存在 $\delta>0$,对区间$[a,b]$中任一区间$[\alpha,\beta]$,均有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta},$$

则$f(x)=0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

证明 由题设知,对任一 $x\in[a,b]$,均有

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|\Delta x|^{\delta}.$$

根据$f(x)$的连续性,可得(令 $\Delta x\to 0$)

$$|f(x)|=0\ (a\leqslant x\leqslant b).$$

例 4 设$f(x)$在$[0,1]$上可微,$0\leqslant f'(x)\leqslant 1\ (0\leqslant x\leqslant 1)$且$f(0)=0$,则

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

证明 运用从变动中考察常量的思想,作 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t, x\in[0,1]$,则

$$F'(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right].$$

因为$f(x)$递增,所以

$$\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right)'=2f(x)[1-f'(x)]\geqslant 0,$$

所以 $F'(x)\geqslant 0$,这说明 $F(x)\geqslant 0, x\in[0,1]$,也有 $F(1)\geqslant 0$.

例 5 设 $f\in C((-\infty,\infty))$. 若对任意的 $a(a\neq 0), b$,积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只与$\frac{b}{a}$有关,且有 $f(1)=2$,则$f(x)=\frac{2}{x}$.

证明 不妨设$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F\left(\frac{b}{a}\right)$,则在两端对 b 求导,对 a 求导,可知

$$f(b)=F'\left(\frac{b}{a}\right)\frac{1}{a},\quad -f(a)=F'\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a^2}\right).$$

由此易得 $bf(b)=af(a)$. 令 $b=x, a=1$,我们有

$$xf(x)=f(1), f(x)=\frac{f(1)}{x}=\frac{2}{x}.$$

思考练习 试证明下列命题:

1. 设$f(x)$是$[-a,a]$上的连续函数,若$f(x)$是偶(奇)函数,则它必有一个原函数是奇(偶)函数.

2. 设$f(x)$是$[a,b]$上的正值可积函数,则存在 $\xi\in(a,b)$,

使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设 $f\in C([a,b])$, $g\in C([a,b])$, 且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

4. 设 $f(x)$ 在任意的 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$, $h(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可微, 若 $F'(x)=f(x)(x\in(-\infty,\infty))$, 则

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'=f[h(x)]h'(x)-f[g(x)]g'(x).$$

5. 设 $f\in R([a,b])$, 且 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 若记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. $x\in[a,b]$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}=\frac{f(x_0+)-f(x_0-)}{2}.$$

§6 定积分的间接计算法

N-L 公式是用原函数直接计算定积分的值的,但我们在第一册的不定积分的学习中知道,当被积函数的结构比较复杂或是两种不同类型函数的乘积时,其原函数很难直接求得. 因此,在那里,我们用函数复合的观点,以及分部求原函数的观点导出了换元积分法,以及分部积分法等间接寻求原函数的方法. 从而在定积分的计算中,也就相应地有了同名的计算法.

必须指出的是,定积分与原函数概念的本意是完全不同的. 因此,从定积分自身出发所建立起来的换元以及分部积分法,其适应性更广. 这是数学专业的学生必须注意的.

6.1 换元积分法

定理 7.13(换元积分法公式之一) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连

续函数，$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上可微，且有

$$\varphi(\alpha)=a\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(\beta)=b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

又 $\varphi'\in R([\alpha,b])$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \quad ①$$

证明 依题设，不妨记 $F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则 $F[\varphi(t)]$就是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的原函数. 注意到 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的可积性，根据 N-L 公式立即可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

即式①成立.

从上述证明中可以看出，运用原函数只是获得式①两端数值相等的过程中的一个手段. 考虑到一个函数的定积分定义本身与其原函数的存在没有关系，因此还有另一换元积分法，它对式①中$f(x)$的要求还可降低.

定理 7.14(换元积分公式之二) 设 $f\in R([a,b])$，$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上可微且严格单调，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$. 且 $\varphi'\in R([\alpha,\beta])$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \quad ②$$

证明 首先，式②中右端的定积分是否存在还不清楚，因此我们的任务是要阐明它存在而且等于左端. 为此，

(1) 不妨假定$\varphi(t)$是严格递增的，并对$[\alpha,\beta]$的任一分划 Δ：$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，以及任意的 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，作积分和

$$\sigma_\Delta=\sum_{i=1}^n f[\varphi(\xi_i)]\varphi'(\xi_i)\Delta t_i.$$

(2) 为了使 σ_Δ 与式②的左端联系起来，也来作$f(x)$在$[a,b]$上的积分和：记

$$x_i=\varphi(t_i)\ (i=0,1,2,\cdots,n),$$

则由 φ 的严格递增性可得$[a,b]$的分划 $\Delta':a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,而取插点 $\eta_i=\varphi(\xi_i)\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,其积分和为

$$S_{\Delta'}=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f[\varphi(\xi_i)]\Delta x_i.$$

为了与 σ_Δ 作比较,利用微分中值公式

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\zeta_i)\Delta t_i,$$
$$\zeta_i\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n),$$

再将 $S_{\Delta'}$ 写成

$$S_{\Delta'}=\sum_{i=1}^{n}f[\varphi(\xi_i)]\varphi'(\zeta_i)\Delta t_i.$$

现在,我们可以来估计差 $S_{\Delta'}-\sigma_\Delta$:

$$|S_{\Delta'}-\sigma_\Delta|=\left|\sum_{i=1}^{n}f[\varphi(\xi_i)][\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\xi_i)]\Delta t_i\right|.$$

在这里,不妨假定 $|f(x)|\leqslant M,x\in[a,b]$,且记 $M_i(\varphi')=\sup\limits_{[t_{i-1},t_i]}\{\varphi'(t)\},m_i(\varphi')=\inf\limits_{[t_{i-1},t_i]}\{\varphi'(t)\}(i=1,2,\cdots,n)$,易知

$$|\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\xi_i)|\leqslant M_i(\varphi')-m_i(\varphi')\ (i=1,2,\cdots,n).$$

由此可得

$$|S_{\Delta'}-\sigma_\Delta|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f[\varphi(\xi_i)]||\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\xi_i)|\Delta t_i$$
$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}[M_i(\varphi')-m_i(\varphi')]\Delta t_i.$$

由 $\varphi'\in R([a,b])$,我们有

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}|S_{\Delta'}-\sigma_\Delta|=0.$$

此外,注意到 $\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上的一致连续性,可知当 $\|\Delta\|\to0$ 时,必有 $\|\Delta'\|\to0$,因此又有

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}S_{\Delta'}=\lim_{\|\Delta'\|\to0}S_{\Delta'}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

从而立即得到

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sigma_\Delta=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

即式②成立.

注 与不定积分类似,在公式②的右端,视 $\varphi'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}\varphi(t)$,被积表达式视为 $f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)$. 那么就相当于在公式②的左端表达式$f(x)\mathrm{d}x$ 中用 $x=\varphi(t)$替换变量而已. 这一设想给实际上的形式运算带来了方便. 与不定积分变量替换公式不同,在这里,公式②只表示两端数值相等,没有再把新变量换回原变量的手续,而只要更换上、下限. 因此,这在原函数不易表出时就显出它的优越性了.

推论 7.11 设 $f\in R([a,b])$,$\varphi\in C^{(1)}([\alpha,\beta])$,且有

$$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b;\ \varphi'(t)>0,\ t\in[\alpha,\beta],$$

则 $f[\varphi(t)]$在$[\alpha,\beta]$上可积.

例 1 设$f(x)$是$[-a,a]$上的可积函数.

(1) 若$f(x)$是偶函数,则$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若$f(x)$是奇函数,则$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明 作变量替换 $x=-t$,则$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0}f(-t)\mathrm{d}t$

$=\int_{0}^{a}f(-t)\mathrm{d}t$.

(1) 当$f(x)$是偶函数时,有$f(-x)=f(x)$. 故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 当$f(x)$是奇函数时,有$f(-x)=-f(x)$,故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

例 2 设 $f\in C([0,a])$且在$[0,a]$上$f(x)+f(a-x)\neq 0$,则

$$J\ \underline{\underline{\mathrm{def}}}\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}.$$

证明 作变量替换 $x=a-t$,可得

$$J=\int_0^a \frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)}\mathrm{d}t.$$

由此易知

$$\begin{aligned}2J&=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x+\int_0^a \frac{f(a-t)}{f(t)+f(a-t)}\mathrm{d}t\\&=\int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x=a,J=\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

特别有$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

例3 设 $f\in C([0,1])$非负,$f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)\leqslant 1+x,x\in[0,1]$.

证明 令 $F(x)=1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=2f(x)\leqslant 2\sqrt{F(x)}$.从而有

$$\sqrt{F(x)}-1=\int_0^x \frac{F'(t)\mathrm{d}t}{2\sqrt{F(t)}}\leqslant\int_0^x \mathrm{d}t=x.$$

例4 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,\infty)$ 上,且对任意的 $a,b\in(-\infty,\infty)$,$f\in R([a,b])$.若有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y),\quad x,y\in(-\infty,\infty)$$

求 $f(x)$.

解 首先,取定 x 不变,视 $f(x+y)$ 为 y 的函数,并记 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=A$.则在上式两端作对 y 在$[0,1]$上的定积分,可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x+y)\mathrm{d}y&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}y+\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\\&\quad+\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}y\\&=f(x)+A+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}.\end{aligned}$$

再对左端积分作变量替换:$y=t-x$,又知

$$\int_x^{1+x} f(t)\mathrm{d}t = f(x) + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + A.$$

其次,因为$f(x)$是可积函数,所以上式左端的变限积分是x的连续函数.从而上式右端是x的连续函数,随之可知$f(x)$实际上是连续函数.再返回去看左端,就知道左端是关于x的可微函数.于是又知$f(x)$是可微函数.这样,为了解出$f(x)$,就可用微分法剥离积分符号,即在左、右端对x求导,我们有

$$f(1+x) - f(x) = f'(x) + x + \frac{1}{3}.$$

由题设知 $f(1+x) - f(x) = f(1) + x(x+1)$,代入上式可得

$$f(1) + x^2 = f'(x) + \frac{1}{3}.$$

由此立即推知

$$f(x) = \left[\frac{1}{3} + f(1)\right]x + \frac{x^3}{3} + C.$$

最后,由题设易知 $f(0)=0$,故得 $C=0$,从而求出

$$f(x) = \left[\frac{1}{3} + f(1)\right]x + \frac{x^3}{3}.$$

例 5 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}.$

证明 因为 $\dfrac{1}{k+m+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{k+m}\mathrm{d}t$,所以

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{k+m}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t^m \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^k \mathrm{d}t = \int_0^1 t^m (1-t)^n \mathrm{d}t.$$

对上式右端积分作变量替换 $x=1-t$,可得

$$\int_0^1 t^m (1-t)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 x^n (1-x)^m \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^k \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^{k+n} \mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\int_0^1 x^{k+n}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}.$$

即得所证.

思考练习 解答下列问题:

1. 试证明下列公式:

(1) $\int_0^1 x(1-x)^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n^2+3n+2}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x=2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$. (用 $\sin 2x$)

(3) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$. (其中 $f\in C([0,1])$).

(4) $\int_0^1 \dfrac{\arctan x}{1+x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$. $\left(\text{提示:令 } x=\dfrac{1-t}{1+t}\right)$

2. 设 $f\in C([-1,1])$,试证明

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

3. 求满足不等式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+\int_0^1 f^2(x^2)\mathrm{d}x$ 的连续函数 $f(x)$. $\left(\text{左}=\int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x\right)$

4. 设 $f\in C([-1,1])$. 若对 $[-1,1]$ 上的任一连续偶函数 $g(x)$,都有

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

试证明 $f(x)$ 是奇函数. (考察 $[-1,0]$ 与 $[0,1]$ 上的积分)

5. 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,试证明 $f(x)$ 是奇函数的充分必要条件是:存在常数 C,使得

$$\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t=C,\quad x\in(-\infty,\infty).$$

6. 设 $f\in C([a,b])$, $a<c<d<b$. 试证明

$$\lim_{h\to 0}\int_c^d\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(d)-f(c).$$

7. 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且有

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\alpha f(x),\quad x\in(-\infty,\infty),0<\alpha<1,$$

求 $f(x)$.

8. 设 $f\in C([0,1])$,试证明

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

9. 设 $f\in R([0,1])$,试证明 $F(x)=f(x^2)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

10. 设定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的 $f(x)$ 满足

(1) $f(x)=f(x-\pi)+\sin x\ (-\infty<x<\infty)$,

(2) $f(x)=x(0\leqslant x<\pi)$,试证明 $\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x=\pi^2-2$.

6.2 分部积分法

首先,类似于换元积分法之一,直接通过原函数的方法,可将不定积分中的分部积分法移植于定积分计算中.

定理 7.16(分部积分公式之一) 设 $u(x),v(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的可微函数,而且 $u'\in R([a,b]),v'\in R([a,b])$,则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.\qquad ①$$

证明 依题设易知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)v(x)]=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),\quad x\in[a,b].$$

这说明上式右端的一个原函数就是 $u(x)v(x)$,再注意到它的可积性,可得

$$u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)v(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

移项后就是式①.

注 与不定积分中所述一样,式①也可写成便于记忆的公

式

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

从而使积分中的形式符号 $\mathrm{d}x$ 可当作微分运算了.

例1 计算定积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x,(n\geqslant 2)$.

解 根据分部积分法,我们有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x\\&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即 $I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$,从而得到

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

由此公式进行递推,可知

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0,\quad m\in\mathbf{N}^*,$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1,\quad m\in\mathbf{N}^*.$$

因为我们有

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,$$

所以分别 n 是偶数或奇数的情形,可得

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\mathrm{d}x=\frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}.$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\mathrm{d}x=\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

例 2 (Wallis① 公式)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明 由积分不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x,$$

以及上例的计算可知

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

从而有

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

估计上式左、右端的差,即得

$$\frac{\pi}{2}-\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}\right\}\frac{1}{2n}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}\to 0\ (n\to\infty).$$

即得所证.

分部积分法之一是直接通过被积函数的原函数获得的,从而要求的条件就高了.大家知道,即使每个函数都有原函数,其函数的乘积也不一定有原函数(见本章注记).因此,从定积分自身出发,还可建立如下的条件要求较弱的分部积分公式.为证明简洁起见,先介绍一个引理.

引理 7.3 若 $f\in R([a,b])$,$g\in R([a,b])$,则对$[a,b]$的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,以及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.\qquad ②$$

证明 (1) 不妨假定 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a,b]$. 对任给的 $\varepsilon>$

① 沃利斯(1616～1703),英国数学家.

0,由 $g\in R([a,b])$ 可知,存在 $\delta_1>0$,当 $[a,b]$ 的分划 Δ 满足 $\|\Delta\|<\delta_1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

又由 $f\cdot g\in R([a,b])$ 可知,存在 $\delta_2>0$,当 $[a,b]$ 的分划 Δ 满足 $\|\Delta\|<\delta_2$ 时,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) 现在,取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $[a,b]$ 的分划 Δ 满足 $\|\Delta\|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(\xi_i)|\mathrm{d}x\\ &+\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&M\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即得所证.

定理 7.17(分部积分公式之二) 设 $f\in R([a,b])$,$g\in R([a,b])$,且记

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+A,\quad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+B,$$

则

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 对 $[a,b]$ 的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,我们对 $F(b)G(b)-F(a)G(a)$ 作分解

$$F(x)G(x)\Big|_a^b=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)G(x_i)-F(x_{i-1})G(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(x_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} F(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} G(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} F(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x. \quad ③$$

注意到 $G(x)$,$f(x)$,$F(x)$和 $g(x)$都是$[a,b]$上的可积函数,因此对式③令 $\|\Delta\|\to 0$,根据前述引理立即可知

$$F(x)G(x)\Big|_a^b = \int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

从而移项后即得所证.

例 3 设 $f\in R([a,b])$,则

$$I=\int_a^x\left[\int_a^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].$$

证明 根据分部积分公式之二,记

$$F(t)=\int_a^t f(u)\mathrm{d}u,\ g(t)=1,\ G(t)=t-a,$$

我们有

$$I=\int_a^x F(t)g(t)\mathrm{d}t=F(t)G(t)\Big|_a^x-\int_a^x G(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

$$=(x-a)\int_a^x f(u)\mathrm{d}u-\int_a^x (t-a)f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

即得所证.

例 4 设 $f\in R([0,1])$,则

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+o(1)\quad (n\to\infty).$$

证明 对任意的 $\delta>0$,我们有

$$\int_\delta^1 \sqrt[n]{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_\delta^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\int_\delta^1\left(\int_\delta^x f(t)\mathrm{d}t\right)x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\lim_{\delta\to\infty}\int_\delta^1 \sqrt[n]{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt[n]{x}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_\delta^1\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_\delta^1 Mx\cdot x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{M}{n}\int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}\quad (M=\sup_{[0,1]}\{f(x)\}).$$

即得所证.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设$u(x)$,$v(x)$在$[a,b]$上有 $n+1$ 次连续导数,则

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\Big|_a^b$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 $g\in R([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'\in R([a,b])$,则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设$f(x)$在$[0,2\pi]$上可微,且 $f'\in R([0,2\pi])$,则

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=f(0)-f(2\pi).$$

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上二次可导,且 $f''\in R([a,b])$. 若$f(a)=f(b)=0$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x.$$

5. 设$f(x)$,$g(x)$是$[a,b]$上的连续函数,若对$[a,b]$上满足$g(a)=g(b)=0$ 的任一连续可微函数 $\varphi(x)$,有

$$\int_a^b[f(x)\varphi(x)+g(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x]=0,$$

则 $g\in C^{(1)}([a,b])$,且$f(x)=g'(x)$,$x\in[a,b]$.

6. 设$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,求$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

7*. 设 $f\in C^{(1)}([a,b])$，且 $f(a)=f(b)=0$，则存在 $M>0$（与 f 无关），使得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

（提示：令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $|F(x)|^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. 且有 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}F(x)\leqslant\int_a^b |F(x)||f'(x)|\mathrm{d}x$）

§7 定积分中值定理

微分中值公式

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)$$

说明，函数值的差可以通过其导数值来表达和估算，它的重要应用是大家所熟悉的. 如果从求微分运算的逆运算来认识积分运算，那么就有相应的积分的中值公式：记 $F'(x)=f(x)$，即把 $F(x)$ 看作是可积函数 $f(x)$ 的原函数，则上述公式化为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b). \qquad ①$$

这一类公式称之为积分中值公式. 它的重要特征是：一个函数的定积分可以通过其自身进行表达和估算，比之于 N-L 公式需要求出原函数来计算，这一点在许多情形中有很大方便，虽然我们并不知道点 ξ 的确切位置.

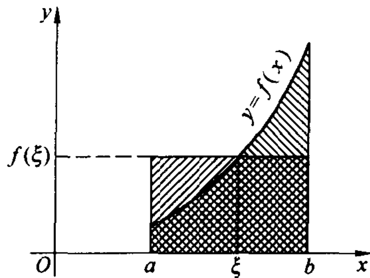


图 7-6

上述公式的几何意义可以从面积的意义来考察：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数，则如图 7-6 所示，公式①左端是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下方图形的面积，右端是底边长 $(b-a)$、高为 $f(\xi)$ 的矩形面积. 而高 $f(\xi)$ 正是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值：

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 离散数量的平均值是算术平均，连续量的平均值应认定为积分平均. 例如：设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是有限个数值，易知它们的平均值(称为算术平均值)就是

$$\frac{f_1+f_2+\cdots+f_n}{n}=\sum_{k=1}^{n} f_k\cdot\frac{1}{n}.$$

现在，如果我们要考察 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值，就必须求无穷多个 $f(x)$ 值的平均值，那么取什么样的无穷多个值呢？怎么算法呢？自然的做法应该是：

(1) 从有限过渡到无限；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的取值点的分布有“公平性”.

按照这一设计，例如把 $[a,b]$ 作分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

再取 $f(x)$ 在插点组 $\langle\xi\rangle$ 上值的平均：

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

然后让 $n\to\infty$，可得极限值为 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (假定 $f\in R([a,b])$)

这就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上值集的平均值意义，它是合情合理的，特别是对连续函数而言，由此还可类似地去理解加权平均值. 对数组 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的加权平均为：

$$\mu=\frac{p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_nf_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_if_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i},$$

其中，$p_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 若将 p_i 理解为 x 轴上点 f_i 上的质量，则 μ 可解释为质点组 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的重心位置.

因此，对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上作加权 $p(x)$ 的平均应定义为

$$\frac{\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}.$$

7.1 定积分第一中值公式

定理 7.18(定积分第一中值公式) 设 $g\in R([a,b])$,且函数值不变号(即对一切 $x\in[a,b]$,$g(x)\geqslant 0$ 或 $g(x)\leqslant 0$).

(1) 若 $f\in R([a,b])$,且记 $M=\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$,$m=\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$,则存在 μ:$m\leqslant\mu\leqslant M$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

(2) 若 $f\in C([a,b])$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad ②$$

证明 (1) 不妨考虑 $g(x)\geqslant 0$,$x\in[a,b]$的情形,我们有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),\quad x\in[a,b].$$

由此又可知

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$,那么 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$,式①对任意的 μ 均成立.从而,不妨设 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$,于是可得

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M.$$

记 $\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$,式①成立.

(2) 当 $f\in C([a,b])$时,M 与 m 就是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值,且 $f(x)$可以取到 M 与 m 之间的一切值,故存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\mu$.因此,第二个结论成立.

注 当 $g(x)\equiv 1$ $x\in[a,b]$时,式②化为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$,这

就是本节引言中提到的公式. 此外,还可使式②中点 ξ 位于 (a,b) 内. 实际上,在 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 的情形,点 ξ 当然可以在 (a,b) 内任意地取了. 现在假定 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$(此时又有 $g(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$),为了在 (a,b) 内找到点 ξ,我们缩小 (a,b) 为 (a',b'),使得(注意变限积分的连续性)

$$\int_{a'}^{b'} g(x)\mathrm{d}x>0, [a',b']\subset(a,b).$$

如果式②中之点 ξ 不在 (a,b) 内,那么必为端点 a 或 b,不妨假定为

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

但由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上的值不等于 $f(b)$,故 $f(x)$ 或都大于 $f(b)$,或都小于 $f(b)$. 若都大于 $f(b)$,则 $f(x)$ 在 $[a',b']$ 上的最小值 m 也大于 $f(b)$. 这样,就有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &=\int_a^b [f(x)-f(b)]g(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant\int_{a'}^{b'} [f(x)-f(b)]g(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant[m-f(b)]\int_{a'}^{b'} g(x)\mathrm{d}x>0.\end{aligned}$$

这一矛盾说明式②中之点 ξ 可在 (a,b) 内取到. 其他情形也可类似地证明.

例 1 设 $f\in C([0,b])$,且 $f(x)\to A(x\to 0+)$,则对 $b>a>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=A\ln\frac{b}{a}.$$

证明 注意到 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,b]$ 上是非负的,以及积分上下限将随 n 而变动,因此在应用积分中值公式时,其中的 ξ 应记作 ξ_n 为妥,即

$$\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi_n)\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\xi_n)\ln\frac{b}{a}.$$

其中,$\frac{a}{n}<\xi_n<\frac{b}{n}$. 从而由 $f(\xi_n)\to A(n\to\infty)$ 立即得证.

例 2 设 $f\in C^{(2)}([-1,1])$,$f(0)=0$,则存在 $\xi\in[-1,1]$,使得

$$f''(\xi)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 将$f(x)$在 $x=0$ 处展成 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)x^2}{2},0<\theta<1.$$

注意到 $f(0)=0$,以及 x 是奇函数,我们有

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f''(\theta x)x^2\mathrm{d}x.$$

假设 $M=\max\{f''(x):-1\leqslant x\leqslant 1\}$,$m=\min\{f''(x):-1\leqslant x\leqslant 1\}$,则可得(注意 x^2 的非负性)

$$\frac{1}{2}m\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}M\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x,$$

$$\frac{m}{3}\leqslant\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{3},m\leqslant 3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

根据 $f''(x)$的连续性可知,存在 $\xi\in[-1,1]$,使得

$$f''(\xi)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x.$$

例3 设 $f\in C([0,\pi])$,且有

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,\ \int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0.$$

则存在两个点 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$,使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证明 如果对上述两个等式直接用中值公式,虽可得 $f(\xi')=0=f(\xi'')\cos\xi''$,但不能保证 $\xi'\neq\xi''$且还有可能 $\cos\xi''=0$. 因此想到更换因子 $\cos x$,而采用分部积分法. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant\pi)$,则依题设可知 $F(\pi)=F(0)=0$. 由此可得

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}F(x)\\&=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x\\&=0+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=\pi F(\xi)\sin\xi.\end{aligned}$$

 显然有 $F(\xi)=0\ (0<\xi<\pi)$.

这说明$f(x)$的原函数$F(x)$有三个零点:$0,\xi,\pi$,那么$f(x)$就有两个不同零点.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设$f\in C([0,1])$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$

$\left(\text{分别在}\left[0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\text{和}\left[\frac{1}{\sqrt{n}},1\right]\text{上估算积分}\right)$

2. 设$f\in C([a,b])$,$g(x)$在$[a,b]$上可微,且$g'(x)$非负可积,则

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)g'(t)dt=f(x)g'(x).$$

3. 设$f\in C([a,b])$,$g\in C([a,b])$,且$\varphi(x)$是$[a,b]$上的非负可积函数,则存在$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$,使得

$$g(\xi_1)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi_2)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

4. 设有定义在$[a,b]$上的连续函数$f(x),g(x),\varphi(x)$,且$\varphi(x)\neq0$,则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

(提示:记$A=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$,$B=\int_a^b g(x)\varphi(x)dx$,并考察辅助函数$F(x)=A\int_a^x g(t)\varphi(t)dt-B\int_a^x f(t)\varphi(t)dt$)

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上可微.若有$f(1)-4\int_0^{\frac{1}{4}}xf(x)dx=0$,则存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$.

(提示:作$F(x)=xf(x)$.又存在$\eta\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$,使得$F(\eta)=$

$\eta f(\eta)$,当然还有 $F(1)=f(1)$)

6. $\dfrac{\pi^2}{64}<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\tan^2 x}<\frac{\pi^2}{32}$. $\left(\dfrac{1}{1+\tan^2\xi},0<\xi<\dfrac{\pi}{4}\right)$

7. 设 $f\in C([a,b])$,$g(x)$在$[a,b]$上有原函数,$g(x)\geqslant 0$,且 $g\in R([a,b])$,试证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t=f(x)g(x),\quad x\in[a,b].$$

8*. 设 $f\in R([a,b])$,且有原函数.若 $g\in R([a,b])$且不变号,试证明存在 $\xi\in[a,b]$,使得(利用导函数的中值性)

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

9*. 设 $f\in C([0,1])$,$f(0)=f(1)=0$,则对 $\alpha\in(0,1)$,存在 $x_1,x_2\in[0,1]$:$x_1-x_2=\alpha$ 或 $1-\alpha$,使 $f(x_1)=f(x_2)$.(对 $f(x)$作周期为 1 的延拓,考察 $g(x)=f(x+\alpha)-f(x)$的积分)

7.2 定积分第二中值公式

定积分中值定理的第二种形式最初是 O. Bonnet 给出的,后由 Weierstrass 推广到一般情形,其证明均基于 Abel 变换,是关于分部求和的一种恒等式.

引理 7.4(Abel①) 设有两组数$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,记 $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_i-b_{i+1})+A_nb_n.$$

证明 因为我们有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=A_1b_1+\sum_{i=2}^{n}(A_i-A_{i-1})b_i$$

---

① 阿贝尔(1802~1829),挪威青年数学家.

$$=A_1(b_1-b_2)+A_2(b_2-b_3)+\cdots+A_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$$
$$+A_nb_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_i-b_{i+1})+A_nb_n.$$

推论 7.11 若有 $m\leqslant A_k\leqslant M$ $(k=1,2,\cdots,n)$,且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0$,则有

$$mb_1\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant Mb_1.$$

定理 7.19(Bonnet[①] 型) 设 $g\in R([a,b])$.

(1) 若$f(x)$是$[a,b]$上非负递减函数,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

(2) 若$f(x)$是$[a,b]$上非负递增函数,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x. \qquad ②$$

证明 首先,根据本章 6.2 节引理 7.3 可知,对$[a,b]$的分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

有极限关系:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x. \qquad ③$$

设$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$,易知

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}[G(x_i)-G(x_{i-1})]f(x_{i-1}).$$

其次,记 M,m 为 $G(x)$在$[a,b]$上的最大值,最小值,则视 $a_i=G(x_i)-G(x_{i-1})$, $b_i=f(x_{i-1})$,而应用 Abel 引理可知

① 旁内(1819～1892),法国数学家.

$(G(a)=0)$

$$mf(a)\leqslant\sum_{i=1}^{n}[G(x_i)-G(x_{i-1})]f(x_{i-1})\leqslant Mf(a).$$

注意到上式左、右端与分划 Δ 无关,故结合式③得到(令 $\|\Delta\|\to 0$)

$$mf(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant Mf(a).$$

现在,假定 $f(a)>0$($f(a)=0$ 时式①自然成立),则上式可写为

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\leqslant M.$$

因为 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以它可取到位于 m 到 M 之间的一切值. 即存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{f(a)}=G(\xi)=\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x,$$

故式①成立.

类似地可以证明式②成立.

定理 7.20(Weierstrass 型) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数,$g\in R([a,b])$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad ④$$

证明 (1) 设 $f(x)$ 是递减的,则

$$\varphi(x)=f(x)-f(b)$$

在 $[a,b]$ 上是非负递减的. 因此,根据定理 7.19 三(1)可知,存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b[f(x)-f(b)]g(x)\mathrm{d}x=[f(a)-f(b)]\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

由此即知

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$$

$$+f(b)\left[\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设$f(x)$是递增的,则$-f(x)$就是递减的.因此由式④可知

$$\int_a^b[-f(x)]g(x)\mathrm{d}x=-f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x-f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

注 上述中值定理在$a>b$时也真.

例1 考察积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

一方面,由 N-L 公式可知

$$I=\frac{-\cos 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

另一方面,视$\sin x$为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的递增函数,则由第二中值公式④可知

$$I=\sin(0)\int_0^{\xi}\cos x\mathrm{d}x+\sin\frac{\pi}{2}\int_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=1-\sin\xi,\ 0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}.\ \ \sin\xi=\frac{1}{2},\ 或\ \xi=\frac{\pi}{6}.$$

例2 设$f(x)$在$[a,b]$上可微,且$f'(x)$是递减函数,又有$f'(b)\geqslant m>0$,则

$$\left|\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.$$

证明 注意到函数$\frac{1}{f'(x)}$在$[a,b]$上非负递增,故由 Bonnet 型第二中值定理可知

$$\left|\int_a^b\cos f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b\frac{f'(x)\cos f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{f'(b)}\left|\int_{\xi}^{b} f'(x)\cos f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{f'(b)}|\sin f(b)-\sin f(\xi)|\leqslant\frac{2}{m}.$$

$$(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

例 3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=0,\alpha<2.$

证明 注意到积分$\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 存在,可知

$$\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to0+}\int_\delta^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\delta\to0+}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\delta}}\frac{\sin u}{u^2}\mathrm{d}u=\lim_{\delta\to0+}x^2\int_{\frac{1}{x}}^{\xi_\delta}\sin u\mathrm{d}u,$$

其中,$\frac{1}{x}<\xi_\delta<\frac{1}{\delta}$. 由此即得

$$\left|\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant2x^2,\quad x>0.$$

从而我们有

$$\left|\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant2x^{2-\alpha},$$

即得所证.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设 $0<a<b$,则

(1) $\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{a}$;

(2) $\left|\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a}$.

2. 设 $a>0,x>0$,则$\left|\int_x^{x+a}\sin t^3\mathrm{d}t\right|<\frac{4}{3x^2}$.

§8　定积分在几何与力学中的初步应用

8.1　平面区域的面积

(一) 直角坐标系中的情形

平面区域面积的计算，在阐述定积分几何意义时已经知道. 若曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是非负的，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下方图形(曲边梯形)的面积 S 由定积分

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

确定.

若 $f(x)\leqslant 0, x\in[a,b]$，此时定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$. 因此，应由其绝对值反映出面积 S 的值：

图　7-7

$$S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号，如图 7-7 所示，则应将 $[a,b]$ 分割成若干个子区间，使 $f(x)$ 在每个子区间上不变号. 此外，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下方图形面积，应为各个子区间上的曲边梯形面积的总和，或等于各子区间上积分绝对值的总和.

例 1　求正弦曲线 $y=\sin x$ 与横轴在 $x=0$ 到 $x=2\pi$ 之间所围的区域面积 S.

解　因为(见图 7-8) $\begin{cases}\sin x\geqslant 0, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ \sin x\leqslant 0, & \pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ 所以我们有

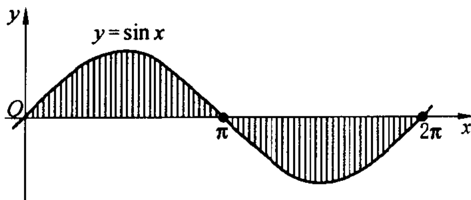


图　7-8

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x\right|=2+|-2|=4.$$

如果需要计算两曲线 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 与直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的区域面积,那么在 $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ 的情形下,其面积 S 应为(见图 7-9)

$$S=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))\mathrm{d}x.$$

例 2 求由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围成的区域面积 S.

解 为将此问题化归为曲边梯形来求面积,需先确定所围平面区域在 x 轴上的范围. 为此,先求两曲线的交点. 由 $\sqrt{x}=x^2$ 可知,其两个交点的 x 坐标为 $x_1=0$, $x_2=1$(见图 7-10). 从而有

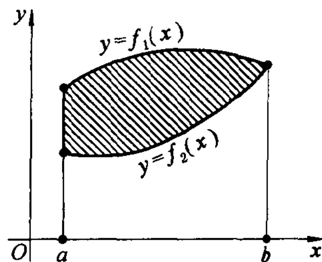


图 7-9

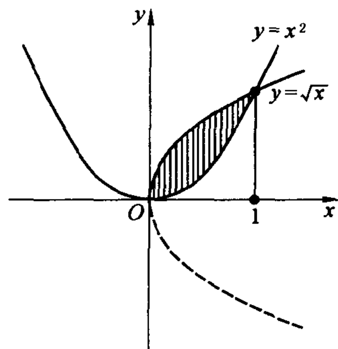


图 7-10

$$S=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

例 3 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 则

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \quad ①$$

证明 如图 7-11 所示,考察面积 S_1, S_2. 注意到

$$q-1=\frac{1}{p-1},$$

易知

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{a^p}{p},$$

$$S_2=\int_0^b y^{q-1}\mathrm{d}y=\frac{a^q}{q}.$$

从几何意义看，边长为 a 与 b 的矩形面积不超过 S_1+S_2，故有

$$ab\leqslant S_1+S_2=\frac{a^p}{p}+\frac{a^q}{q}.$$

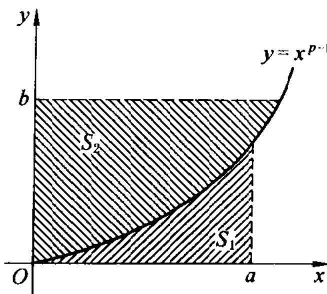


图 7-11

(二) 参数方程表示曲线的情形

若$[a,b]$上的曲边梯形的曲边 $y=f(x)$是由参数方程

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出的，这里假定$\varphi(t)$，$\psi(t)$是$[\alpha,\beta]$上的连续可微函数，且$\psi(t)\geqslant 0$，$\varphi'(t)\neq 0$，$t\in[\alpha,\beta]$. 此时，可用反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$代入得

$$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)),a\leqslant x\leqslant b.$$

其中，当$\varphi(t)$是递增时，有$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；否则有$\varphi(\alpha)=b$，$\varphi(\beta)=a$. 从而该曲边梯形面积为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\psi(\varphi^{-1}(x))\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\varphi(t)\text{递增};\\-\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,\varphi(t)\text{递减}.\end{cases}$$

例 4 求星形线$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$围成的区域面积.

解 由于该曲线是关于 x 轴、y 轴对称的，故只需求出它在第一象限形成的下方图形面积(见图 7-12，即曲边三角形 OAB 的面积). 采用曲线的参数表示：

$$x=a\sin^3 t,\ \ y=a\cos^3 t,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi;$$

$$x(0)=0,\ \ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=a.$$

从而按公式，我们有

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)x'(t)\mathrm{d}t=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t.$$

注意到(用替换 $t=\frac{\pi}{2}-x$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t.$$

又可得

$$S=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

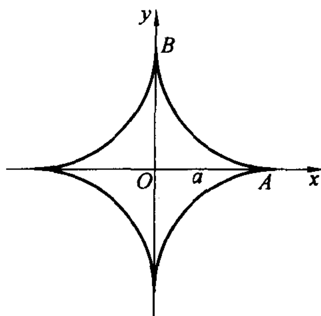


图 7-12

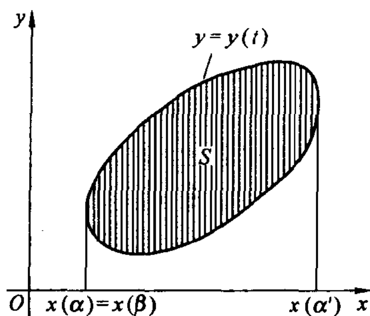


图 7-13

当参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 是一条简单光滑闭曲线(即 $x(\alpha)=x(\beta)$, $y(\alpha)=y(\beta)$, 但当 $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$ 且 $t_1\neq t_2$ 时,点 $(x(t_1),y(t_1))$ 与点 $(x(t_2),y(t_2))$ 不同,又 $x'(t)$, $y'(t)$ 是连续函数且不同时为零)的情形,其闭曲线所围区域面积 S 公式可推导如下:

不妨假定该曲线在平面直角坐标系中位于第一象限(图 7-13),且 t 从 α 到 α' 时 $x=x(t)$ 从 $x(\alpha)$ 严格递增到 $x(\alpha')$, t 从 α' 到 β 时, $x=x(t)$ 从 $x(\alpha')$ 严格递减回到 $x(\beta)$. 此时我们有

$$S=\int_\beta^{\alpha'}y(t)x'(t)\mathrm{d}t-\int_\alpha^{\alpha'}y(t)x'(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{\alpha'}^{\beta}y(t)x'(t)\mathrm{d}t-\int_\alpha^{\alpha'}y(t)x'(t)\mathrm{d}t=-\int_\alpha^{\beta}y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$$

类似地,若 t 在分段 $\alpha<\alpha'<\beta$ 上由递减变为递增,则上述公式中

积分前应取正号.

在许多情形下,将上述面积公式作如下转换是便于计算的. 因为根据分部积分公式,有

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)\mathrm{d}t=-y(t)x(t)\Big|_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta}x(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

$$=0+\int_{\alpha}^{\beta}x(t)y'(t)\mathrm{d}t,$$

所以面积 S 的计算公式也可写成

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t.$$

例5 求闭曲线 $\begin{cases}x=a\sin t\cos^2 t,\\ y=a\cos t\sin^2 t,\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 所围区域的面积 S.

解 易知它是一条简单光滑闭曲线,且位于平面直角坐标系第一象限中,从而有

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi a^2}{32}.$$

注 当图形位于其他象限时,若计算值出现负号,只需取绝对值即可.

(三) 极坐标系中曲边扇形面积的计算

设平面曲线由极坐标系中的方程

$$r=f(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给定,则称由 $r=f(\theta)$ 以及径向量 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 之间形成的图形为

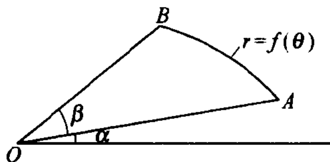


图 7-14

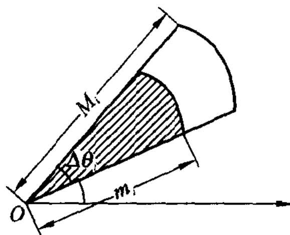
曲边扇形,如图 7-14 中之 OAB. 我们的目的是要计算 OAB 的面积,且不希望经过替换返回直角坐标系,再应用曲边梯形的面积公式来计算,因为这可能带来计算上的复杂和困难.

为了寻求上述曲边扇形面积 S 的计算公式,我们仍遵循求曲边梯形面积的设计思想. 假设 $r=f(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$上是 Riemann

可积的,现在对$[\alpha,\beta]$作分划

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta,$$

相当于用径向量$\theta=\theta_i$对曲边扇形的张角$\beta-\alpha$进行分割.如图7-15所示,记$r=f(\theta)$在向径$\theta=\theta_{i-1}$与$\theta=\theta_i$之间的小曲边扇形面积为ΔS_i,则$S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$.若令



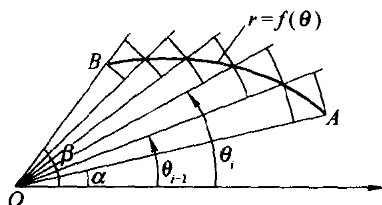


图 7-15

$$m_i=\inf_{[\theta_{i-1},\theta_i]}\{f(\theta)\},M_i=\sup_{[\theta_{i-1},\theta_i]}\{f(\theta)\},\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$$

易知,$\frac{1}{2}m_i^2\Delta\theta_i$,$\frac{1}{2}M_i^2\Delta\theta_i$为内、外小圆扇形的面积,且有

$$\frac{1}{2}m_i^2\Delta\theta_i\leqslant\Delta S_i\leqslant\frac{1}{2}M_i^2\Delta\theta_i(i=1,2,\cdots,n).$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{2}\Delta\theta_i\leqslant S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i^2}{2}\Delta\theta_i.$$

因为上式左、右端是函数$\frac{1}{2}f^2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上的Darboux下和、上和,所以根据$f(\theta)$的可积性可知

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{2}\Delta\theta_i=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i^2}{2}\Delta\theta_i=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}f^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

由此可得曲边扇形的面积的计算公式

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

注 可以证明,曲边扇形面积通过化归为曲边梯形的方法

求面积,结果是相同的.

例 6 求由双纽线 $r=a\sqrt{\cos 2\theta}$ 围成的面积 S.

解 由对称性可知,只需求出其夹在向径 $\theta=0$ 与 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 之间的曲边扇形面积(图 7-16). 我们有

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}.$$

即 $S=a^2$.

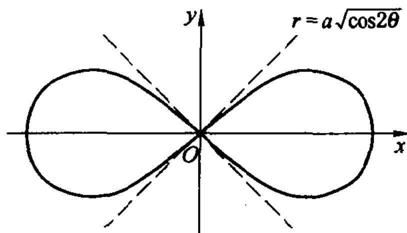


图 7-16

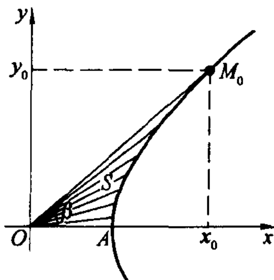


图 7-17

例 7 设 $M_0(x_0,y_0)$ 是双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上的一点. 求图 7-17 所示曲边三角形 OAM_0 的面积.

解 因为曲边三角形与扇形基本同型,且该双曲线易用极坐标表示为(注意 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$)

$$r^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta},$$

所以 OAM_0 的面积 S 可用扇形面积公式计算如下:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\beta} r^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{a^2}{4}\ln\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta},\ \tan\beta=\frac{y_0}{x_0}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列曲线所围区域的面积:

(1) $\begin{cases}y=x^2-2x,\\ y=-x^2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}y=6x-x^2-7,\\ y=x-3;\end{cases}$

(3) $y^2=4a_1x, y^2=4a_2x, x^2=4b_1y, x^2=4b_2y$, 其中 $0<a_1$

$<a_2, 0<b_1<b_2$;($16(a_1-a_2)(b_1-b_2)$).

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与其上一点 $P\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$之切线以及 x 轴.

2. $y^2=2x$ 将圆 $x^2+y^2=8$ 分割为两部分,求此两部分面积之比.

3. 求由曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴所围区域的面积.

4. 求下列曲线所围区域的面积:

(1) $x=a(2\cos t-\cos 2t), y=a(2\sin t-\sin 2t)$;

(2) $r=a\theta(\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2, a>0)$;

(3) $r=a(1-\cos\theta)\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

8.2 用平行截面面积求立体体积

(一) 用平行截面面积求立体体积的一般方法

对于三维空间中的立体,如何看它的体积问题,属于多元函数的定积分范畴,其一般理论和方法将在本书第三册中作介绍.不过,其中的一些特殊情形,可以通过一元函数的定积分确定,这就是本节陈述的内容.

设有一立体 Ω,它在直角坐标系中位于两个平面 $x=a, x=b(a<b)$之间.现在用垂直于 x 轴的平面去截 Ω,记其截面面积为 S,显然 S 与该平面在 x 轴上的位置有关(是 x 的函数):

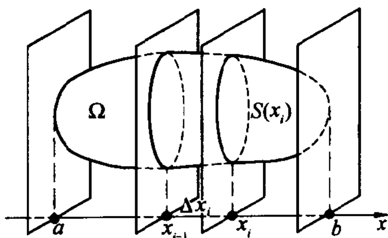


图 7-18

$$S=S(x).$$

假定 $S(x)$在$[a,b]$上是可积的,则 Ω 的体积 V 就是

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

为阐明这一结论,我们对$[a,b]$作分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

相应于这一分划,用垂直于 x 轴的平面 $x=x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 将 Ω 分割成 n 个小的层体(图 7-18). 若记位于 $[x_{i-1},x_i]$ 之间的层体体积为 $\Delta V_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i$. 若令

$$m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}\{S(x)\},\quad M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}\{S(x)\}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

从而又有

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant V\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n).$$

上式左、右端是可积函数 $S(x)$的 Darboux 上、下和,故当 $\|\Delta\|\to 0$ 时,有共同的极限值:$S(x)$在$[a,b]$上的定积分. 即得以截面求体积的公式①.

例 1 求三维椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积.

解 易知 x 的变化范围为$[-a,a]$. 所谓用垂直于 x 轴的平面去截椭球,就是暂时视 x 为定量,考察变量 y,z 的变动状况. 为此,写出

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\quad 或\quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1.$$

由此可知,截面的边界曲线是一个椭圆,它的两个半轴为

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad b_2=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

对此椭圆,我们已知其面积,即

$$S(x)=\pi b_1b_2=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

从而按公式可知,椭球体积 V 为

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

例 2 求由圆柱体 $x^2+y^2=R^2$,平面 $y=0,z=0,\dfrac{x}{R}+\dfrac{z}{H}-$

$1=0$ 以及 $\frac{x}{R}+\frac{z}{H}+1=0$ 围成的立体体积 V.

解 由于该立体关于平面 $x=0$ 对称,故只需计算第一象限内的体积. 如图 7-19 所示,每一个垂直于 x 轴的平面与立体相截的截面是矩形 $ABCD$. 记 $OA=x$,则

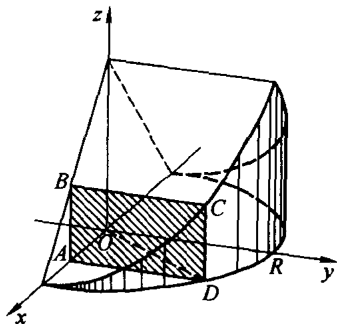


图 7-19

$$AB=\frac{H}{R}(R-x),AD=\sqrt{R^2-x^2}.$$

从而截面面积为

$$S(x)=\frac{H}{R}(R-x)\sqrt{R^2-x^2}.$$

由此可知该立体体积为

$$V=2\int_0^R S(x)\mathrm{d}x=2\,\frac{H}{R}\int_0^R(R-x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2HR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=HR^2\,\frac{3\pi+4}{6}.$$

(二) 旋转体的体积

用截面面积的定积分计算立体体积之所以可行,主要是因为截面面积函数 $S(x)$ 容易求得. 因此,计算旋转体体积是其中较理想的情形了.

所谓旋转体,是指一个由平面曲线围成的区域绕某一直线(轴)旋转形成的立体. 例如,在空间直角坐标系中,由连续曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下方图形绕 x 轴形成的旋转体如图 7-20 所示. 为求它的体积 V,按前述的设计,先求其垂直于 x 轴的平面与该旋转体的截面. 易知截面为一圆面,故截面积 $S(x)$ 为

$$S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x).$$

从而,根据公式①,可得旋转体体积 V 的计算公式

$$V=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \qquad ②$$

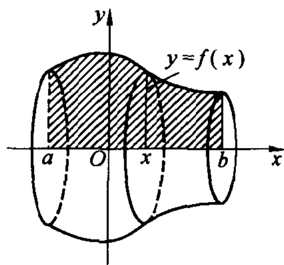


图 7-20

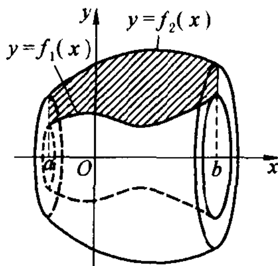


图 7-21

例3 求悬链线

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=a\cosh\frac{x}{a},\ x\in[0,b].$$

绕 x 轴旋转生成的旋转体体积 V.

解 根据公式②,我们有

$$V=\pi\int_0^b\left[\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\right]^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx$$
$$=\frac{\pi a^3}{8}(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}})+\frac{\pi a^2 b}{2}.$$

如果在$[a,b]$上的连续曲线 $y=f(x)$是由参数式

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$$

表示的,其中$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$. 那么,当$\varphi(t)$有正的连续导函数时,该曲边梯形绕 x 轴旋转的旋转体体积为

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t)\varphi'(t)dt;\qquad ③$$

当 $\varphi(t)$是递减时,体积应为

$$V=-\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t)\varphi'(t)dt.$$

此外,设有$[a,b]$上定义的两条平面连续曲线 $y=f_1(x)$与 $y=f_2(x)$,且满足

$$f_2(x)\geqslant f_1(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b],$$

则对于由 $y=f_1(x)$与 $y=f_2(x)$以及直线 $x=a$ 与 $x=b$ 围成的区域(图 7-21)绕 x 轴旋转的旋转体体积 V 为

$$V=\pi\int_a^b (f_2^2(x)-f_1^2(x))\mathrm{d}x \qquad ④$$

上面介绍的旋转体均以 x 轴为旋转轴，对于$[c,d]$上的连续曲线 $x=g(y)$形成的曲边梯形(图 7-22)，类似地可得到它绕 y 轴旋转的旋转体体积 V 的计算公式

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y.$$

而相应于公式③及④(图 7-23)，可得

$$V=\pi\int_\gamma^\delta \varphi^2(x)\psi'(t)\mathrm{d}t,\quad V=\pi\int_c^d (g_2^2(y)-g_1^2(y))\mathrm{d}y.$$

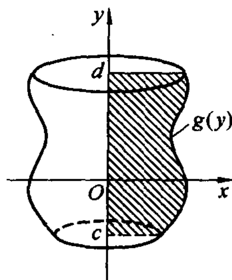


图 7-22

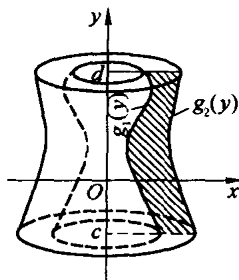


图 7-23

例 4 求由曲线 $y=4-x^2$，$y=3x$ 以及 x 轴上从 -2 到 1 的线段围成的区域绕 x 轴的旋转体体积 V.

解 所述图形如图 7-24 所示. 首先求出 $y=4-x^2$ 与 $y=3x$ 的交点为 $x=1$.

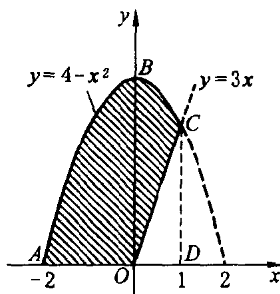


图 7-24

对图形稍加分析可知，所求旋转体体积 V 可视为两个旋转体体积 V_2 与 V_1 之差，其中

$$V_2=\pi\int_{-2}^1 (4-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{153}{5}\pi,$$

$$V_1=\pi\int_0^1 (3x)^2\mathrm{d}x=3\pi.$$

从而得 $V=V_2-V_1=\frac{138}{5}\pi$.

思考练习 解答下列问题:

1. 求 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$绕 x 轴的旋转体体积.

2. 求位于$(x-c)^2+y^2=r^2$ 内部与 $y^2=2ax$ 内部的区域绕 x 轴的旋转体体积.

8.3 曲线弧长

设有一段平面曲线,记为$\widehat{AB}$,我们要计算它的长度——弧长. 用什么办法? 如果它是一段弯曲的绳子,或许可以抓住两端把它拉直用直尺来度量,而这在一般情形下是办不到的. 虽然如此,这一操作经验仍值得借鉴,那就是以(直)弧$\overline{AB}$代之. 当然,这样做误差太大,于是想到对$\widehat{AB}$作分划(图 7-25)

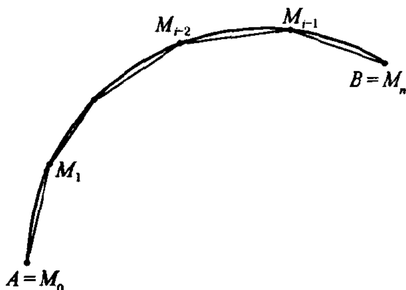


图 7-25

$$\Delta^*: A=M_0, M_1, \cdots, M_n=B,$$

将$\widehat{AB}$划分成许多小弧段,并在每个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上作弦 $\overline{M_{i-1}M_i}$. 这些弦连结成从 A 到 B 的一条折线,此折线长就是所有小段弦长的和,并以此折线长作为$\widehat{AB}$弧长的近似值. 自然,运用已经学习过的微积分处理问题的手段,我们知道这一分划过程必须继续进行下去,而转入极限过程. 即考察分划中小段弦长之最大者 $\|\Delta^*\|$ 趋于零时,取相应的折线长度的极限. 若此极限存在,则称$\widehat{AB}$是可求长的,其极限值就认作是$\widehat{AB}$的弧长. (当然,它也是$\widehat{BA}$的弧长)

这种对曲线弦长的认识,实际上是对弧长的一种定义,从而就可以根据曲线的表达式导出计算弧长的公式.

1. 设$\overset{\frown}{AB}$是自身不相交的且非封闭的曲线,其表达式由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给定.这里假定$\varphi(t)$与$\psi(t)$是连续可微的,且点A的坐标为$(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$,点$B$的坐标为$(\varphi(\beta),\psi(\beta))$.对$\overset{\frown}{AB}$作分划

$$\Delta^*:A=M_0,M_1,\cdots,M_{n-1},M_n=B,$$

相应分点M_i的坐标为(x_i,y_i),记其相应参数t的值为$x_i=\varphi(t_i)$,$y_i=\psi(t_i)$,并以分割Δ^*的点序排列而成$[\alpha,\beta]$的一个分划

$$\Delta:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta.\ (\Delta t_i=t_i-t_{i-1})$$

现在记A到B的折线长为l,小段弦$\overline{M_{i-1}M_i}$长记为Δl_i,$\|\Delta^*\|=\max\{\Delta l_i:i=1,2,\cdots,n\}$.易知

$$\begin{aligned}\Delta l_i&=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}\\&=\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}.\end{aligned}$$

注意到φ与ψ的可微性,可应用微分中值公式将Δl_i转化成与自变量的改变量Δt_i的关系式:

$$\Delta l_i=\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i,$$

$$\xi_i,\eta_i\in(t_{i-1},t_i),\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

从而立即得折线长为

$$l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i.\qquad ①$$

推演至此,根据$\overset{\frown}{AB}$弧长的定义,需实施$\|\Delta^*\|\to0$的极限过程.由观察得知,式①的右端为类似于定积分的积分和式结构,而极限过程需要$\|\Delta\|\to0$才行.稍后,我们将证明$\|\Delta^*\|\to0$与$\|\Delta\|\to0$是等价的.现在先承认这一结论,从而问题化为研究当$\|\Delta\|\to0$时,和式

$$l=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i.$$

的极限.显然,它还不是函数$\sqrt{[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}$在$[\alpha,\beta]$上的积分和,需转而考察

$$\bar{l}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i.$$

因为我们有①

$$\left|\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\eta_i)]^2}-\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\xi_i)]^2}\right|$$

$$\leqslant|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|,$$

所以得到

$$|l-\bar{l}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|\Delta t_i.$$

对于上式右端,由 $\psi'(x)$在$[\alpha,\beta]$上的一致连续性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\|\Delta\|<\delta$ 时,有

$$|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|<\varepsilon,\ \ i=1,2,\cdots,n.$$

由此知$|l-\bar{l}|<\varepsilon(\beta-\alpha)$. 为说明

$$\lim_{\|\Delta^*\|\to 0} l=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i$$

$$=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i.$$

即有公式

$$\widehat{AB}\text{弧长}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}x. \qquad ②$$

现在我们来证明,$\|\Delta^*\|\to 0$ 等价于 $\|\Delta\|\to 0$,并以引理方式给出.(符号与定理相同)

引理 7.5 设$\widehat{AB}$是自身不相交的非闭曲线且由参数方程

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出,这里假定 $\varphi(t)$与 $\psi(t)$有连续函数. 若$\widehat{AB}$的分划 Δ^* 与$[\alpha,$

---

① 根据不等式$|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}|\leqslant|b_1-b_2|$. 其证明在 $a\neq 0$ 时,可由等式

$$\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}=\frac{b_1+b_2}{\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b_2^2}}(b_1-b_2)$$

导出.

$\beta]$的分划为 Δ 相对应,则 $\|\Delta^*\|\to 0$ 与 $\|\Delta\|\to 0$ 等价.

证明 (1) 对于任给 $\varepsilon<0$,由 φ,ψ 在$[\alpha,\beta]$上的一致连续性可知,存在 $\delta>0$,使得当分划 Δ 中的相邻分点满足$|t'-t''|<\delta$时,有

$$|\varphi(t')-\varphi(t'')|<\varepsilon,\quad |\psi(t')-\psi(t'')|<\varepsilon.$$

从而,与此相对应的$\widehat{AB}$的相邻分点M',M''组成的弦长$\overline{M'M''}$满足

$$\overline{M'M''}=\sqrt{[\varphi(t'')-\varphi(t')]^2+[\psi(t'')-\psi(t')]^2}<\sqrt{2}\varepsilon.$$

这说明当$\|\Delta\|<\delta$时,$\|\Delta^*\|<\varepsilon$.

(2) 设$\|\Delta^*\|\to 0$,此时若$\|\Delta\|\to 0$不成立,则存在 $\varepsilon_0>0$,对正数列$\{\delta_n\}:\delta_n\to 0\ (n\to\infty)$中的每一个 δ_n,都可找出$\widehat{AB}$的两个相邻分割点M_n',M_n'',使得弦长$\overline{M_n'M_n''}<\delta_n$,但与此相应的$[\alpha,\beta]$分划中的相邻分点 t_n',t_n'',却有$|t_n'-t_n''|>\varepsilon_0\ (n=1,2,\cdots)$.

注意到$\{t_n'\}$,$\{t_n''\}$是有界数列,故存在收敛子列,不妨仍记为

$$t_n'\to t^*,\quad t_n''\to t^{**}\ (n\to\infty).$$

$$|t^*-t^{**}|=\lim_{n\to\infty}|t_n'-t_n''|\geqslant\varepsilon_0,$$

这说明 $t^*\neq t^{**}$,但若与 t^*,t^{**} 相应的$\widehat{AB}$上之点记为 M^*,M^{**},则根据 $n\to\infty$时,有

$$\begin{cases}\varphi(t_n')\to\varphi(t^*),\\ \psi(t_n')\to\psi(t^*),\end{cases}\quad \begin{cases}\varphi(t_n'')\to\varphi(t^{**}),\\ \psi(t_n'')\to\psi(t^{**}),\end{cases}$$

或写成

$$M_n'\to M^*,\quad M_n''\to M^{**}\ (n\to\infty),$$

而得到 $M^*=M^{**}$(由于 $M_n'M_n''\to 0,n\to\infty$). 这说明不同的参数 t^*,t^{**} 都对应着同一点 $M^*=M^{**}$,与$\widehat{AB}$无重点矛盾. 因此在$\|\Delta^*\|\to 0$ 时必有$\|\Delta\|\to 0$.

引理证毕.

注 公式②是在假定$\widehat{AB}$自身不相交的非闭曲线的条件下证得的. 如果$\widehat{AB}$是闭曲线(即 $A=B:\varphi(\alpha)=\varphi(\beta),\psi(\alpha)=\psi(\beta)$),

式②也成立. 实际上,任取 $\bar{t}\in(\alpha,\beta)$,记其$\widehat{AB}$上对应点为 $\bar{M}$,从而分解$\widehat{AB}$为两条非闭曲线弧段:$\widehat{A\bar{M}}$与$\widehat{\bar{M}B}$,且在原有条件下得到

$$\widehat{A\bar{M}}\text{弧长}=\int_{\alpha}^{\bar{t}}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$\widehat{\bar{M}B}\text{弧长}=\int_{\bar{t}}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

从而,认定$\widehat{AB}$弧长为$\widehat{A\bar{M}}$与$\widehat{\bar{M}B}$两弧长之和,即得

$$\widehat{AB}\text{弧长}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. 若$\widehat{AB}$是由直角坐标方程

$$y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

给出,这里假定$f(x)$是连续可微的,则易知弧长公式化为

$$\widehat{AB}\text{弧长}=\int_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x. \qquad ③$$

3. 若$\widehat{AB}$是由极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给出(这里假定 $r(\theta)$是连续可微的),则可转化为参数方程 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$ 后,经计算得公式为

$$\widehat{AB}\text{弧长}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta. \qquad ④$$

例 1 求圆 $x^2+y^2=2$ 被曲线 $y=|x|$所截部分$\widehat{AB}$之弧长.

解 易知两曲线之交点为 $A(-1,1),B(1,1)$且$\widehat{AB}$可由方程 $y=\sqrt{2-x^2}$ 表示. 根据弧长公式,可知

$$\widehat{AB}\text{弧长}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

例 2 求外摆线(圆外旋轮线)

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos t-b\cos\dfrac{a+b}{b}t, \\ y=(a+b)\sin t-b\sin\dfrac{a+b}{b}t \end{cases}$$

在$[0,t_0]$上的弧长 s.

解 易知

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(a+b)\left(\sin t-\sin\dfrac{a+b}{b}t\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(a+b)\left(\cos t-\cos\dfrac{a+b}{b}t\right). \end{cases}$$

根据弧长公式,得

$$s=\int_0^{t_0}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{t_0}2(a+b)\sin\frac{a}{2b}t\,\mathrm{d}t$$

$$=2(a+b)\frac{2b}{a}\left(-\cos\frac{a}{2b}t\right)\bigg|_0^{t_0}=\frac{4b(a+b)}{a}\left(1-\cos\frac{a}{2b}t_0\right).$$

例 3 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$的周长 s.

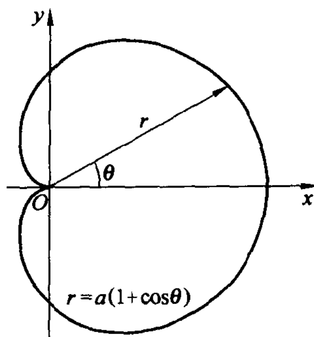


图 7-26

解 记 s_1 为向径角 θ 位于 0 与 π 之间曲线弧长(图 7-26),因为

$$r'(\theta)=-a\sin\theta,$$

所以有

$$s=2s_1$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=8a,$$

注 对于方程

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\zeta(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出的三维空间曲线弧段,在 $\varphi(t)$、$\psi(t)$与 $x(t)$具有连续导函数的情形下,也可得出弧长公式

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\zeta'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

思考练习 试证明下列命题:

1. 曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在 $[0,4]$ 上的弧长为 $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

2. 曲线 $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$ 在 $1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}$ 上的弧长为 $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$.

3. 曲线 $r=a\theta$ 在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上的弧长为 $a\left\{\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right\}$.

4. 曲线 $x=a(1-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上一点 $P(x(t_0),y(t_0))$ $(0<t_0<\pi)$ 到顶点 $A(\pi a,2a)$ 的弧长记为 l, 则 $l=4a\sin\theta$, 其中 θ 是该曲线在 P 点之切线与 x 轴的夹角.

5. 曲线 $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ 的全长为 $\frac{3}{2}\pi a$, 而在分段 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的弧长形成等差数列.

8.4 旋转体的侧面积

原则上说,一个曲面的面积我们还没有在数学上给予明确定义(将在本书第三册中介绍),但对于旋转体的侧面积这一特殊情形,则可以通过曲线的弧长来认识. 即将该旋转体侧面视为曲线绕一直线(轴)旋转形成的——旋转曲面.

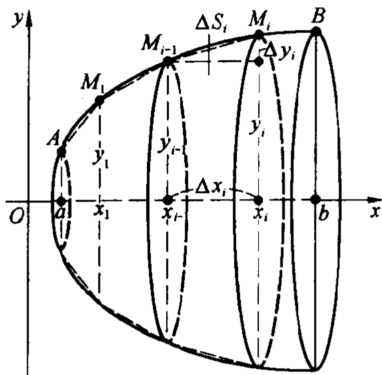


图 7-27

设曲线段 $\widehat{AB}$ 由定义在 $[a,b]$ 上的非负函数 $y=f(x)$ 表示,它绕 x 轴形成的旋转曲面如图 7-27 所示. 作该曲线的弦 AM_1, M_1M_2, $\cdots$, $M_{n-1}B$, 即相应于 $[a,b]$

的一个分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

记 $y_i=f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,其分段弦长各记为 $\Delta l_1,\Delta l_2,\cdots,\Delta l_n$. 易知在绕 x 轴旋转过程中,弦 $M_{i-1}M_i(i=1,2,\cdots,n)$形成一个圆台的侧面,其面积 ΔS_i 为

$$\Delta S_i=\pi(y_{i-1}+y_i)\Delta l_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

我们假定$f(x)$具有连续的导函数,则由前已推导过的公式可知

$$\Delta l_i=\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i, x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而得

$$\Delta S_i=\pi(y_{i-1}+y_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

从而各圆台侧面面积之总和为

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\pi\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i\\ &=\pi\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i.\end{aligned}$$

不难证明极限

$$\begin{aligned}S &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}S_n=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i\\ &=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\xi_i)\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\Delta x_i\end{aligned}$$

存在,它是 $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ 在$[a,b]$上的定积分. 因此,我们认定它是$[a,b]$上曲线 $y=f(x)$绕 x 轴的旋转曲面的面积 S:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \qquad ①$$

注意,若在$[a,b]$上 $y=f(x)\leqslant 0$,则公式①应为

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

例 1 设 $c>a>0$,求圆 $x^2+(y-c)^2=a^2$ 绕 x 轴旋转的旋转曲面面积 S.

解 易知此旋转曲面为圆环面,故分别计算 $y=c+\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $y=c-\sqrt{a^2-x^2}$ 的旋转曲面面积即可.因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mp x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

所以我们有

$$\frac{S}{2}=2\pi a\left(\int_0^a\frac{c+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{c-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\pi a\int_0^a\frac{c+\sqrt{a^2-x^2}+c-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=2\pi^2ac.$$

例 2 求旋轮线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的曲线段绕直线 $y=a$ 旋转的旋转曲面面积.

解 直线 $y=a$ 平行于 x 轴,因此只需将 x 轴平移至 $y=a$ 处,或原曲线 $y=f(x)$ 向下平移 $y=a$ 的距离,即可应用原有的求面积公式.即

$$S=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}[y(t)-a]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

因为 $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, $t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$,所以有

$$S=-4\pi a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\cdot\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

作变量替换 $\cos\left(\frac{t}{2}\right)=z$,则得

$$S=-8\pi a^2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2z^2-1)\,\mathrm{d}z=\frac{16\sqrt{2}\pi a^2}{3}.$$

8.5 定积分应用的朴素定式——点位微分的积累

(一) 点位弧长微分的设想

为了获得曲线弧长、旋转曲面面积等各种计算公式,前面采

用了分划、求和以及取极限等复杂手段.在这些严谨的逻辑推演基础上,现在我们就可以将这一漫长过程加以提练,抽象成一种朴素的定式设计,由此而得到简明的统一公式,且还可将这种设定推广到其他定积分的应用领域.

计算曲线弧长,最朴素的想法是采用弧长 s 作变量,因为遵照定积分是微分的积累这一思想,那么曲线弧段总长 s_0 就可写成

$$s_0=\int_0^{s_0}\mathrm{d}s. \qquad ①$$

在这里,我们把 $\mathrm{d}s$ 设想成位于 s 处的"点弧长":是 s 到 $s+\Delta s$ 的弧段在 $\Delta s\to 0$ 时的极限状态的"极限量"(图 7-28),称为"点位弧长微分"(也就是说在点 s 处有弧长 $\mathrm{d}s\neq 0$ 的极限弧段,这正是 Leibniz 的最初的感性认识).这避免了冗长的推理,而且对求解应用课题带来很多方便,前文已有各种 $\mathrm{d}s$ 的表达式:

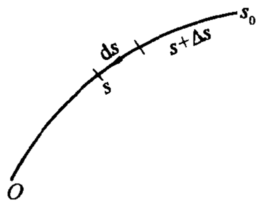


图 7-28

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

所以将这些表达式代入式①并更换积分上、下限,就又回到前面讲过的计算弧长的公式了.

让我们再来看旋转曲面面积公式.设总长为 s_0 的曲线段绕一直线 l 旋转而成旋转曲面.如果曲线上的点 s 处与 l 的距离记为 $R(s)$,那么点位弧长绕 l 旋转可得面积 $2\pi R(s)\mathrm{d}s$.再遵照微分积累成积分的思想,易知总曲面面积为

$$2\pi\int_0^{s_0}R(s)\mathrm{d}s. \qquad ②$$

这是一个采用弧长为变量时得到的公式.当曲线以 $y=f(x),a\leqslant x\leqslant b$ 表达,且绕 x 轴旋转时,由于曲线上点 $s=(x,f(x))$处与轴之距离为$f(x)$,故式②化为上一节之式①.

当旋转曲线由参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t)\geqslant 0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出时，易知其绕 x 轴旋转的旋转曲面面积为

$$2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

当旋转曲线由极坐标方程表示为

$$r=r(\theta)\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta_1\leqslant 0\leqslant\theta_2\leqslant\pi$$

时，由于曲线上点 $s=(\theta,r(\theta))$ 处与 x 轴之距离为 $r(\theta)\sin\theta$，故式②化为

$$2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

例 1 求曲线段 $y=\frac{1}{3}x^3\ (0\leqslant x\leqslant\sqrt[4]{2})$ 绕直线 $3y-\sqrt{2}x=0$ 旋转的旋转曲面面积.

解 因为在这里的曲线与直线皆在直角坐标系中，所以公式②可化为

$$S=2\pi\int_0^{\sqrt[4]{2}} R(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

其中，$R(x)$ 表示曲线上点 $(x,f(x))=\left(x,\frac{1}{3}x^3\right)$ 到直线 $3y-\sqrt{2}x=0$ 的距离(图 7-29)：

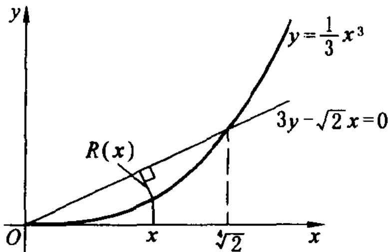


图 7-29

$$R(x)=\frac{|x^3-\sqrt{2}x|}{\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{2}x-x^3)}{\sqrt{11}},\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt[4]{2}.$$

从而知旋转曲面面积为

$$S=\frac{2\pi}{\sqrt{11}}\int_0^{\sqrt[4]{2}}\sqrt{2}x\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x-\frac{2\pi}{\sqrt{11}}\int_0^{\sqrt[4]{2}}x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{3\sqrt{22}}(3\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{2}).$$

(二) 点位面积微分

类似于点位弧长微分的设计,对于平面区域的面积,也可引发点位面积微分的设计:在点(x,y)和(r,θ)处的点位面积微分各为 $d\sigma=dxdy$(直角坐标系);$d\sigma=rdrd\theta$(极坐标系).

8.6 定积分在力学中的初步应用

下面,我们将再次运用"积分是微分的积累"这一朴素的思想来简化某些力学量的定式.

(一) 静力矩,质心

设在具有直角坐标系的平面上有一个质量为 m 的质点 $P(x_0,y_0)$,我们称

$$mx_0,my_0$$

各为质点 P 对 y 轴以及对 x 轴的静力矩 F_y,F_x.

若平面上有一组(n 个)质点

$$P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n)$$

组成的质点系统,其上之质量各为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,则此质点系的总质量 m,力矩 F_y 与 F_x 各为

$$m=\sum_{i=1}^{n}m_i,\ F_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i,\ F_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i.$$

根据力学的理论,该质点系有一个质量中心点,简称为质心,其坐标记为(x_c,y_c),它是

$$x_c=\frac{F_y}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\ y_c=\frac{F_x}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}.$$

(这可从质量相同的两个质点的情形来理解)

从上述公式可以看出,引进质量中心的这一概念,就可使质点系的总静力矩简化为总质量集中质心点所形成的静力矩.

本节将从这一力学考察来探求物体(平面或立体)的质心问题.

例 1(质量曲线的质心)　设有长为 s_0 的平面曲线弧段$\overset{\frown}{AB}$. 若采用弧长作变量,并假定在点 s 处其线密度为 $\rho(s)$,则在该处的点位弧长 ds 的质量的 $\rho(s)ds$. 从而$\overset{\frown}{AB}$的总质量为

$$m=\int_0^{s_0}\rho(s)\,ds.$$

现在考察$\overset{\frown}{AB}$对直线 l 的力矩. 如果$\overset{\frown}{AB}$上点 s 处到 l 之距离为 $R(s)$,那么该质点弧长 ds 对 l 的力矩为 $\rho(s)R(s)ds$. 从而其总力矩 F_l 为

$$F_l=\int_0^{s_0}\rho(s)R(s)\,ds.$$

假定$\overset{\frown}{AB}$在直角坐标系中以 $y=f(x)\geqslant 0\ (a\leqslant x\leqslant b)$给出,点 $s=(x,f(x))$处的线密度为 x 的函数 $\rho(x)$,则其质量公式化为

$$m=\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

此时,$\overset{\frown}{AB}$上点 $s=(x,f(x))$处与 x 轴以及 y 轴之距离各为 $y=f(x)$以及 x,从而其力矩各为

$$F_x=\int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx;$$

$$F_y=\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

这样,易知$\overset{\frown}{AB}$的质心坐标为

$$x_c=\frac{\int_a^b x\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx};$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}.$$

例 2(质量平面块的质心)　考察在平面直角坐标系中由 $y=f_2(x),y=f_1(x)(f_2(x)\geqslant f_1(x))$以及 $x=a,x=b$ 围成的质量分布均匀的平面区域 H 的质心问题. 首先,由于质量是均匀分布的,所以其面密度 $\rho=\rho_0$(常数),故 H 的质量为

$$m=\rho_0\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

其次,考察 H 内点(x,y)处的点位面积(微分量)$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其质量为 $\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于点$(x,y)$到 x 轴以及 y 轴的距离各为 y 以及 x,故此点位面积对 x 轴以及 y 轴的力矩各为 $y\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 以及 $x\rho_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 从而 H 的总力矩各为(在两个方向上作积分)

$$F_x=\int_a^b\left\{\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}y\mathrm{d}y\right\}\rho_0\mathrm{d}x=\frac{\rho_0}{2}\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]\mathrm{d}x,$$

$$F_y=\int_a^b\left\{\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\mathrm{d}y\right\}\rho_0 x\mathrm{d}x=\rho_0\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

(二) 转动惯量

大家知道,一物体作直线运动时,质量是描述其惯性大小的量. 对于作旋转运动的物体来说,描述其惯性大小的量称作转动惯量(惯性矩).

先看一质点 m 绕一轴作旋转(圆)运动,假定它与该轴的距离为 r,其切线速度为 v,则其动能为$\frac{1}{2}mv^2$. 记其旋转角速度为 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,如图 7-30 所示,则

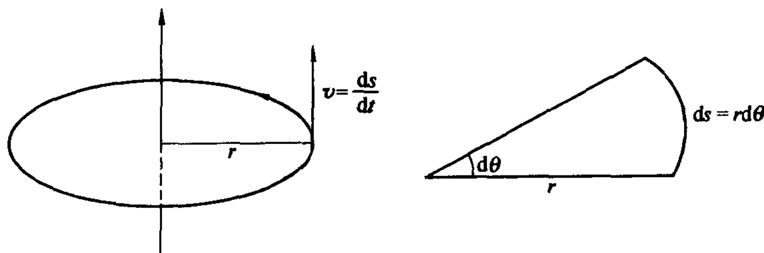


图 7-30

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r\omega,\quad \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

由此可知量 mr^2 刻画出质点 m 转动时的惯性大小,即转动惯量. 易知,对质点组$\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$以角速度 ω 绕直线 l 作(圆)旋转的转动惯量为

$$I_l=\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \quad (r_k \text{ 为 } m_k \text{ 到 } l \text{ 之距离}).$$

例 3(质量曲线段的惯性矩) 考察弧长为 s_0 的曲线弧段 $\widehat{AB}$绕一直线 l 的转动惯量. 以弧长 s 为变量,并假定$\widehat{AB}$上点 s 处的线密度为$\rho(s)$,点 s 到 l 之距离为$R(s)$,则位于 s 处的点位弧长 ds 绕 l 的转动惯量为$R^2(s)\rho(s)ds$. 从而得$\widehat{AB}$绕 l 的转动惯量 I_l 为

$$I_l=\int_0^{s_0}\rho(s)R^2(s)ds.$$

易知当$\widehat{AB}$由平面直角坐标系中 $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 表达时,则其绕 x 轴以及 y 轴的转动惯量各为

$$I_x=\int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

$$I_y=\int_a^b x^2\rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

例 4(质量平面块的惯性矩) 考察面密度 $\rho=1$,半径为 a 的圆盘绕过圆心的垂直线的转动惯量 I_l. 易知此时圆盘中任一点上的点位面积微分采用极坐标表示是方便的,即位于点$(\theta, r(\theta))$处的点位的质量为 $1\cdot d\sigma=rdrd\theta$. 从而其绕轴的转动惯量为 $r^2\cdot rdrd\theta=r^3drd\theta$,再积分(双向)得

$$I_l=\int_0^a\left\{\int_0^{2\pi}d\theta\right\}r^3dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

例 5 考察半径为 a,质量为 M 的均匀圆盘绕直径 l 旋转的转动惯量 I_l.

解 如图 7-31 所示,点位面积的大小用微分表示为 $rdrd\theta$,注意到均匀面密度为 $\rho_0=\dfrac{M}{\pi a^2}$,点$(\theta,r(\theta))$到直线 l 之距离为 $r\sin\theta$,可知该点

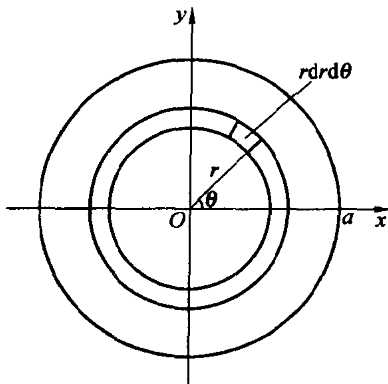


图 7-31

位微分绕 l 之转动惯量为

$$(r\sin\theta)^2\cdot\frac{M}{\pi a^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{M}{\pi a^2}r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

从而,整个圆盘绕 l 的转动惯量为

$$I_l=\frac{M}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a r^3\mathrm{d}r\right\}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{M}{4}a^2.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 设质量分布均匀的曲线段 $\widehat{AB}$ 由直角坐标中的参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t)\geqslant 0,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出,试求 $\widehat{AB}$ 的质心坐标 (x_c,y_c).

2. 设质量分布均匀的曲线段 $\widehat{AB}$ 由直角坐标系方程

$$y=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b$$

给出,试求 $\widehat{AB}$ 相对于直线 $l:y=mx+b$ 的静力矩.

3. 求下列质量均匀分布的曲线段(对 x 轴,y 轴)的静力矩:

(1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (x,y\geqslant 0)$;(2) $r=2a\cos\theta\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

4. 求线密度 $\rho=1$ 的曲线段的质心.

(1) $x=R\cos\theta,y=R\sin\theta\ \left(|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$;(2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}\ (1\leqslant y\leqslant 2)$.

5. 试证明下列命题:

(1) 若质量均匀分布的曲线段对称于 y 轴,则其质心位于 y 轴上;

(2) 质量均匀分布的曲线段对于过其质心的直线的惯性矩是 0;

(3) 线密度 $\rho=1$ 且长为 s_0 的直线段 AB 相对于直线 l(l 与 AB 不相交)的惯性矩为 $\frac{1}{3}l(a^2+ab+b^2)$. 其中 a 是点 A 到 l 之距离,b 是点 B 到 l 之距离.

6. 求下列平面区域(质量均匀分布)的质心:

(1) $y=ax^n, y=0, x=a, x=b$; (2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$; $y=0$.

7. 求下列平面区域(质量均匀分布)的惯性矩 I_x, I_y:

(1) $y=\cos x\left(|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right), y=0$; (2) $y=x^2, y=\sqrt{x}$.

8. 设密度为 1 的平面曲线段在直角坐标系中由参数方程

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出,试求其绕 x 轴以及 y 轴旋转的转动惯量.

9. 设质量为 M 的均匀分布的平面曲线段由极坐标方程

$$r=f(\theta),\ \ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给出,试求其绕极轴旋转的转动惯量.

(三) 其他应用举例

例 6(考虑空气阻力的自由落体运动)

考察一自由下落质量为 m 的物体,在 $t=0$ 时其离地面的高度为 s_0,初速 $v_0=0$,且记其在 t 秒末时下落距离为 $s(t)$. 按物理学中的假设,下落时空气阻力与下落速度 $v(t)$ 成正比(记比例常数为 $a>0$),故按牛顿定律可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-av,$$

也可写为 $\mathrm{d}v=\left(g-\frac{av}{m}\right)\mathrm{d}t$,或

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{g(1-k^2v)}\mathrm{d}v,\ \ k=\sqrt{\frac{a}{mg}}.$$

在上式两端作积分,易知

$$t=\int_0^t\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{\mathrm{d}v(t)}{g(1-k^2v(t))}=-\frac{1}{gk^2}\ln|1-k^2v(t)|.$$

从而解出 $v(t)$ 为

$$v(t)=\frac{1}{k^2}(1-\mathrm{e}^{-gk^2t}).$$

这一公式指出:由于有空气阻力,故下落物体的速度不可能无限制增加,且其极限速度为

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)=\frac{1}{k^2}=\frac{mg}{a},$$

它依赖于质量 m 和 a(与落体形状、空气密度有关).

例 7(宇宙速度) 我们要把一质量为 m 的火箭从地面垂直发射升空至高度 h 处,必须克服地球引力作功. 设置 y 轴,以地球中心为原点,升空方向为正向,因为火箭位于离地面高 y 处所受到的引力与 y 有关,因此这是一个变力作功问题.

设地球质量为 M,则按物理定律,质点 m 位于高度 y 处所受引力为

$$F_y=G\frac{Mm}{y^2},$$

其中 $G=\frac{R^2g}{M}$是引力常数,R 是地球半径. 从而考察直线段$[0,h]$内任一点 y 处,质量为 m 的火箭向上移动 $\mathrm{d}y$ 距离应作的功为$G\frac{Mm}{y^2}\mathrm{d}y$. 因此,欲将火箭从地面(离地心距离为 R)升空至 h 处需作功为

$$W_h=\int_R^{R+h} G\frac{Mm}{y^2}\mathrm{d}y=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

由此可知,为使火箭离地球而去,就是令 $h\to+\infty$,这样就需作功

$$\lim_{h\to\infty}W_h=mgR.$$

假定火箭上升时初速为 v_0,其可以作功的能量为$\frac{1}{2}mv_0^2$,由公式

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR,$$

解出($g=9.81\mathrm{m/s^2}$,$R=6371\mathrm{km}$)$v_0=11.2\mathrm{km/s}$. 这是使火箭飞离地球(克服地球引力)所必需的最小初速(第二宇宙速度).

§ 9 定积分的近似计算

大家知道,定积分的值主要是通过 Newton-Leibniz 公式来

计算的，但必须求出原函数. 然而可积函数不一定有原函数. 即使是连续函数，它的原函数虽然存在，但也不一定可用初等函数来表示. 因此，人们就转而求其近似值. 这在误差可控制的情况下，有着重要的应用价值. 更何况，在许多工程技术以及科学实验中，理论上的数量关系往往是从离散的数据中近似地或经过抽象而获得的. 在计算机飞速发展的今天，定积分的近似计算已不是难事了. 这里，仅介绍最简单和初等的几种离散化估值法.

9.1 从积分和式求近似值

(一) 矩形公式

定积分是作为积分和的极限来确定的，从而我们首先想到的是，用特定的积分和式来近似估计定积分值.

设 $f\in R([a,b])$，作$[a,b]$的等分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$x_1=a+ih,h=\Delta x_1=\frac{b-a}{n}\ (n=1,2,\cdots,n).$$

取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$，可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^n f(\xi_i)h=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i). \qquad ①$$

我们称公式①为关于定积分近似计算的**矩形公式**，这可从积分和的几何意义中得到解释.

根据在每个区间$[x_{i-1},x_i]$中的 ξ_i 取法不同，矩形公式可以有不同算法：

(1) 取 $\xi_i=x_{i-1}\,(i=1,2,\cdots,n)$，式①化为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}). \qquad ②$$

(2) 取 $\xi_i=x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，式①化为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i). \qquad ③$$

(3) 取 $\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\ (i=1,2,\cdots,n)$，式①化为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad ④$$

公式②、③以及④也可各称为左、右以及中值矩形公式.

关于矩形公式在近似计算中的精度,我们有下述误差估计:

定理7.21 当$f(x)$在$[a,b]$上连续可微时(以左值矩形公式为例),可得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}M_1. \qquad ⑤$$

其中 $M_1=\sup\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}$.

证明 我们有 $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$
\begin{aligned}
⑤\text{ 式左端} &= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(x_{i-1})|\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(\xi_i)(x-x_{i-1})|\mathrm{d}x \\
&\leqslant M_1 \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)^2}{n^2} = \frac{(b-a)^2}{2n}M_1.
\end{aligned}
$$

由此立即得出式⑤.

(二) 梯形公式

矩形公式的实质,是把每个区间$[x_{i-1},x_i]$上的曲线弧段$f(x)$用平行于x轴的直线段代替(图7-32),并以其矩形面积代替该弧段的下方图形面积. 可想而知,在曲线不很平坦时,这种近似代替并不理想. 改进的方法之一是以连结点$(x_{i-1},f(x_{i-1}))$与$(x_i,f(x_i))$的折线来代替弧段$f(x)$(图7-33). 此时,弧段$f(x)$在每个$[x_{i-1},x_i]$上的下方图形面积则以Δx_i与该折线为腰的梯形面积近似代替,故可称为梯形法.

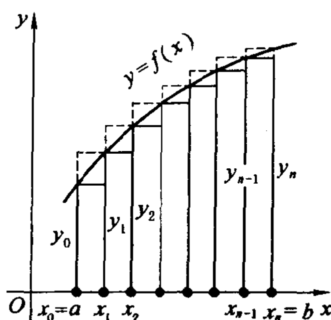


图 7-32

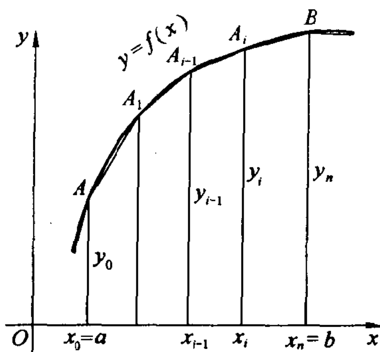


图 7-33

设 $f\in R([a,b])$,作$[a,b]$的等分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$x_i=a+ih,\ h=\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

记 $A_i=(x_i,f(x_i))\ (i=1,2,\cdots,n-1),A=(x_0,f(x_0)),B=(x_n,f(x_n))$,则在每个$[x_{i-1},x_i]$上的弦是$\overline{A_{i-1},A_i}$,其小梯形面积为

$$\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h\ (i=1,2,\cdots,n),$$

而其面积的总和作为定积分的近似值可得公式

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\approx\sum_{i=1}^n\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h\\&=\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^n(f(x_{i-1})+f(x_i))\\&=\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+f(x_{n-1})\right).\end{aligned}\quad ⑥$$

我们称此为定积分近似计算的**梯形公式**. 易知公式⑥的右端是左、右值矩形公式的算术平均.

关于梯形近似公式,当$f(x)$在$[a,b]$上二次连续可微时,其

误差不超过

$$\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{12}\right)^2 M_2, \quad M_2=\max\{|f''(x)|:a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(三) Simpson[①](抛物线)公式

现在介绍第三种定积分近似计算公式,它与前两种公式的设计思想不同之处有二:

(1) 不是以直(平行于 x 轴的线段或连结折线)近似代弧段 $f(x)$的曲,而是以曲—抛物线弧—近似代替弧段$f(x)$的曲.

(2) 确定抛物线弧的三个点用子区间端点及其中点,或是在两个相邻区间$[x_{i-1},x_i]$和$[x_i,x_{i+1}]$上一并考察.

当曲边梯形的曲边为抛物线时,我们特别称之为抛物线梯形. 为此,先引入一个有关抛物线梯形面积的表达公式.

引理 7.6 设抛物线由方程

$$y=f(x)=Ax^2+Bx+C$$

给出,则它在$[x_0,x_2]$上的下方图形面积为

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2), \quad h=\left(\frac{x_2-x_0}{2}\right).$$

其中

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right), \quad y_2=f(x_2).$$

证明 不妨假定 $x_0=-h,x_2=h$,且抛物线梯形如图 7-34 所示. 此时,易知该抛物线梯形面积为

$$S=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C).$$

另一方面,抛物线方程中的系数 A,B,C 与 y_0,y_1,y_2 又有下述关系:

$$y_0=Ah^2-Bh+C \quad (x=-h), \quad y_1=C \quad (x=0),$$

$$y_2=Ah^2+Bh+C \quad (x=h).$$

解之可得 $y_0+4y_1+y_2=2Ah^2+6C$. 因此,我们有

① 辛普森(1710~1761),英国数学家.

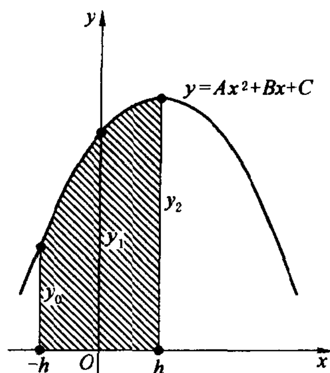


图 7-34

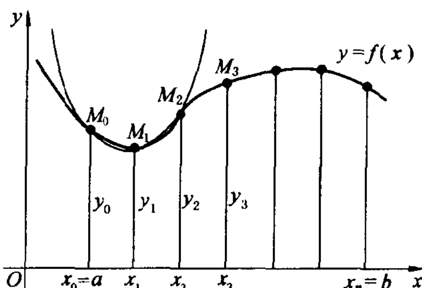


图 7-35

$$S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

现在回来探求抛物线近似公式设计. 设 $f\in R([a,b])$,为方便起见,对$[a,b]$作 $n=2m$ 等分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2m-1}<x_{2m}=b,$$

$$x_i=a+ih,\ \ h=\Delta x_i=\frac{b-a}{2m}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

记 $y_i=f(x_i)$, $M_i=(x_i,y_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,2m)$,在区间$[x_{2i},x_{2(i+1)}]$上,考虑以过三点 M_{2i}, M_{2i+1}, M_{2i+2}的抛物线代替曲线弧段$f(x)$,并以该抛物线梯形面积近似代替$f(x)$的曲边梯形面积(图 7-35),则由引理 7.6 可得

$$\int_{x_0=a}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}).$$

将上列近似式左、右端分别相加,易知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2m-2}$$

$$+4y_{2m-1}+y_{2m}),$$

或写为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0+y_{2m}+4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right)$$

$$=\frac{b-a}{6m}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})\right.$$

$$\left.+2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\right). \qquad ⑦$$

我们称此式为定积分近似计算的 **Simpson 公式**或**抛物线公式**.

在作$[a,b]$的等分划时,如果 n 不以 $2m$ 计时,那么在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$上作抛物线近似时,可用中点$\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$代替第三个点. 此时,Simpson 公式化为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right.$$

$$\left.+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

此外,只要将上式右端写成

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

立即可知,Simpson 近似公式是中值矩形公式与梯形公式的线性组合.

关于 Simpson 公式的误差,则可从下述公式中获得:若 $f(x)$在$[a,b]$上四次连续可微,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})\right)\right|$$

$$=\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4|f^{(4)}(\xi)|.$$

证明 略.

例 1 近似计算 $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 记$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则

$$f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\quad |f''(x)|\leqslant|f''(0)|=2,$$

$$f^{(4)}(x)=24\cdot\frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5},\quad |f^{(4)}(x)|\leqslant|f^{(4)}(0)|=24.$$

取 $n=4,\frac{b-a}{n}=\frac{1}{4}$. 等分点为 $0<\frac{1}{4}<\frac{2}{4}<\frac{3}{4}<1$.

按中值矩形公式计算,可得

$$I\approx\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{64}{65}+\frac{64}{73}+\frac{64}{89}+\frac{64}{113}\right)\approx 0.787,\text{误差}\leqslant\frac{1}{12\times 16}<0.0053.$$

按梯形公式计算,可得

$$I\approx\frac{1}{4}+\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}\right)\approx 0.783.$$

$$\text{误差}\leqslant\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{16}\cdot 2<0.0105.$$

按 Simpson 公式计算,可得

$$I\approx\frac{1}{12}\left(f(0)+f(1)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{4}{5}+4\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)\right)\approx 0.78540.$$

$$\text{误差}\leqslant\frac{1}{180\times 4^4}\times 24<5.3\times 10^{-4}.$$

例 2 近似计算 $I=\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解 注意到被积函数的导数在$(0,1)$上是无界的,故先转换

积分:令 $t=\sqrt{x}$,则

$$I=2\int_0^1 t^2 e^{t^2}dt=te^{t^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{t^2}dt=e-\int_0^1 e^{t^2}dt,$$

从而问题化为求

$$J=\int_0^1 e^{t^2}dt$$

的近似值.采用 Simpson 公式计算,取 $n=6,\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{6}$,且取 $e=2.7183$(误差不超过 2×10^{-5}),我们有

$$J\approx\frac{1}{18}[1+2.71828+4(1.02817+1.28403+2.00260)$$
$$+2(1.11752+1.55962)]=1.46288.$$

易知 $12\leqslant(e^{t^2})''''\leqslant 76e,\ t\in[0,1]$,可得

$$\text{公式误差}\leqslant\frac{76e}{180\times6^4}<0.89\times10^{-3}.$$

再计及关于 e 的估值误差,以及计算误差(不超过 0.5×10^{-4}),最后的误差小于 10^{-3}.

关于 I,我们有 $I\approx2.7183-1.4628=1.2555$.

例 3(Stirling① 公式) 有许多课题,特别是在统计和概率理论的计算中,常须考察 $n!$ 的渐近估计.对此,我们有等价关系

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\quad(n\to\infty).$$

更确切地说,有

$$\sqrt{2n\pi}\cdot n^n e^{-n}<n!<\sqrt{2n\pi}\,n^n e^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right).$$

证明 (1) 易知对数函数 $y=\ln x$ 在$[1,n]$上的下方图形面积为

$$A_n=\int_1^n \ln x dx=n\ln n-n+1.$$

---

① 斯特林(1692~1770),英国数学家.

而在$[1,n]$上用梯形公式估计其面积为

$$B_n=\ln2+\ln3+\cdots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n$$
$$=\ln n!-\frac{1}{2}\ln n.$$

由此可知，当$n\to\infty$时，$n!$ 与 $e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$的量阶关系与A_n与B_n的关系相同.

为阐明后者，设

$$a_n=A_n-B_n,B_n=A_n\left(1-\frac{a_n}{A_n}\right)\quad(n=1,2,\cdots).$$

从而只需指出$\{a_n\}$有界性即可.

首先，注意到$a_{k+1}-a_k$是在$[k,k+1]$上曲线$y=\ln x$的下方图形面积S_k与两端点间割线下方的面积$\underline{S}_k$之差，故由曲线的上凸性可知，$a_{k+1}-a_k>0$，且因为

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1,$$

所以$\{a_n\}$是递增数列.

其次，在$[k,k+1]$上，记位于点$x=k+\frac{1}{2}$处切线的下方图形面积为$\overline{S}_k$，则

$$a_{k+1}-a_k<\overline{S}_k-\underline{S}_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

也就是说

$$a_{k+1}-a_k<\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln k-\frac{1}{2}\ln(k+1)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{1}{2k+1}\right]$$
$$<\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{1}{2(k+1)}\right].$$

将上述不等式两端对$k=1,2,\cdots,n-1$相加，可得$(a_1=0)$

$$a_n<\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

这说明$\{a_n\}$是有界数列. 这样，不妨假定$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由此又知

$$a-a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k)<\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

再由 $A_n-B_n=a_n$，我们有

$$\ln n!\ =1-a_n+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-n.$$

(2) 记 $b_n=\mathrm{e}^{1-a_n}(n=1,2,\cdots)$，由上式即得 $n!=b_n n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$. 因为 b_n 随 n 增大而递减，其极限为 $b=\mathrm{e}^{1-a}$，所以有

$$1<\frac{b_n}{b}=\mathrm{e}^{a-a_n}<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=\sqrt{1+\frac{1}{2n}}<1+\frac{1}{4n}.$$

最后得出

$$bn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}<n!\ <bn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right).$$

(3) 现在在 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\ \sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

中，以 $b_n n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$ 代替 $n!$，以 $b_{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2n}$ 代替 $(2n)!$，可得

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}\sqrt{2}}=\frac{b^2}{\sqrt{2}\,b},\quad b=\sqrt{2\pi}.$$

例 4 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)=\frac{1}{2}(1-\ln 2).$

证明 记此级数的部分和为 S_n，则

$$\begin{aligned}S_n&=n\ln(2n+1)-\ln[1\cdot 3\cdots(2n-1)]^{-n}\\&=n\ln(2n+1)-n-\ln\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\\&=n\ln(2n+1)-n-\ln(2n)!\ +n\ln 2+\ln n!.\end{aligned}$$

根据 Stiring 公式，可知

$$\ln n!\ =n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln\pi}{2}+o(1)\ (n\to\infty),$$

$$\ln(2n)!\ =2n\ln(2n)-2n+\frac{\ln(2n)}{2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln\pi}{2}+o(1)\ (n\to\infty),$$

$$\ln(2n+1)=\ln 2n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).$$

从而我们有

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}+o(1)\ (n\to\infty).$$

思考练习 试证明下列命题：

1. 设$f(x)$在$[a,b]$上二次连续可微(以中值矩形公式为例)，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|\leqslant\frac{b-a}{24}\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^2 M_2.$$

其中$M_2=\sup\{|f''(x)|:x\in[a,b]\}$.

2. 设$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$|f'(x)|\leqslant M,x\in[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{n}M.$$

(证明可参阅积分中值公式中的例证)

9.2 从被积函数大小估算近似值

定积分的估值，是指确定积分值的一个范围. 在这里，不是通过求积分和的方法，而是直接从被积函数的变动范围中估出. 例如被积函数$f(x)$满足关系

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\ x\in[a,b],$$

则根据定积分性质可得

$$I_1=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant I_2=\int_a^b h(x)\mathrm{d}x,$$

其中，自然要求I_1,I_2是容易求积的. 此时，估值的误差范围由I_2-I_1给出.

为了得出上述不等式关系，常用的方法有 Taylor 公式，或利用函数的凸性. 而分割$[a,b]$成适当的子区间后再作估算，仍不失为一个好的设计. 此外，先转换或化简被积函数也会收到事半功倍之效.

例 1 估计积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-0.25\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$，误差小于

5×10^{-4}.

解 记 $f(t)=\sqrt{1-t}$,并应用 Lagrange 余项的 Taylor 公式,可知

$$f(t)=\varphi(t)+R_2,\quad \varphi(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2.$$

$$R_2=\frac{f'''(\xi)}{3!}t^3,\quad f'''(\xi)=-\frac{3}{8}(1-\xi)^{-\frac{5}{2}},\quad 0<\xi<t.$$

以 $0<t=0.25\sin^2x\leqslant\frac{1}{4}$估计,可得

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}}<f'''(\xi)<-\frac{3}{8},\quad -\frac{2}{9\sqrt{3}}\ t^3<R_2<-\frac{1}{16}t^3.$$

因此,

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{8}\sin^2x-\frac{1}{128}\sin^4x\right)\mathrm{d}x=\frac{957\pi}{2048}\approx1.46802.$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_2\,\mathrm{d}t$ 满足关系($t=0.25\sin^2x$)

$$-\frac{1}{288\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_2\,\mathrm{d}x<-\frac{1}{1024}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\mathrm{d}x.$$

由此可知

$$-\frac{5\pi}{9\sqrt{3}\,2^{10}}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_2\,\mathrm{d}x<-\frac{5\pi}{2^{15}},\ \text{或}$$

$$-9.84\times10^{-4}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}R_2\,\mathrm{d}x<-4.79\times10^{-4}.$$

最后,我们有 $I_1-9.84\times10^{-4}<I<I_1-4.79\times10^{-4}$.

例 2 $0<\frac{1}{8\pi}-\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<1.21\times10^{-3}$.

解 (1) 用分部积分公式转换积分:

$$\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\cos x}{x}\bigg|_{4\pi}^{8\pi}-\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8\pi}-\frac{\sin x}{x^2}\bigg|_{4\pi}^{8\pi}-2\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{8\pi}-2\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x.$$

也就是说,我们有

$$\frac{1}{8\pi}-\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=2\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x.$$

(2) 考察积分

$$J_1=\int_{4\pi}^{6\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x,\quad J_2=\int_{6\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x.$$

对于 J_1,有

$$\begin{aligned}J_1&=\int_{4\pi}^{5\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x+\int_{5\pi}^{6\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x=\int_{4\pi}^{5\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x-\int_{4\pi}^{5\pi}\frac{\sin x}{(x+\pi)^3}\mathrm{d}x\\&=\int_{4\pi}^{5\pi}\sin x\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+\pi)^3}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到被积函数的非负性以及$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+\pi)^3}$的递减性,可知

$$\begin{aligned}J_1&<\left(\frac{1}{(4\pi)^3}-\frac{1}{(5\pi)^3}\right)\int_{4\pi}^{5\pi}\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{(4\pi)^3}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)<4.92\times10^{-4}.\end{aligned}$$

对于 J_2,也可得

$$0<J_2<1.11\times10^{-4}.$$

综合以上讨论,可知

$$0<\int_{4\pi}^{8\pi}\frac{\sin x}{x^3}\mathrm{d}x<6.03\times10^{-4}.$$

注　　记

(一) 关于定积分思想、符号体系的建立

在 17 世纪,Leibniz 也曾陈述过类似定积分的思想,并称之为"求和运算"(Calculus Summatorius),他还引入了记号:$\int y\mathrm{d}x$,但没有被后人所重视. 后来,Leibniz 的学生 Bernouli 改称为"求整运算",即现在沿用的积分学(Integral Calculus)一词. 它与微分学(Differential Calculus)一起统称为微积分(Calculus).

定积分符号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是 Fourier(法国数学家)引入的;上、下积分的符号是 1881 年 Volterra(意大利数学家)给出的.

定积分虽是从求面积引入的,但它的应用范围是极其广大的.例如:

设有朝着x轴正向的力f,使位于点$x=a$处的质点平移至点$x=b$处,那么,在f为常力的情况下,其所作之功为

$$W=f\cdot(b-a).$$

但若f是变力,即f随着质点位置的改变而不同,它是x的函数$f(x)$.此时,我们把整个位移段$[a,b]$看成是许多小段位移$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$)的迭加构成的,而且当每个$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$充分小时,认为在位移段$[x_{i-1},x_i]$上力$f(x)$的变化不大,故用在$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$上的常力$f(\xi_i)$代替.从而在位移段$[x_{i-1},x_i]$上$f(x)$所作的功之近似值为$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.此时,和$S_\Delta(f,\xi)$就表示力$f(x)$在$[a,b]$上所作功的近似值.然后再取极限,引出相同的定积分格式.

如上所述的这种将整体分解为充分小的局部,且在局部以直换曲,或以常代变作出目标值的近似的设计思想,正是使 Riemann 积分和在探求许多不同背景下的各种课题(如几何、物理等)中扮演着重要角色.

(二)可积函数的连续点、可积函数与连续函数

大家知道,可积函数不一定是连续函数.但下述结果指出,可积函数的连续点是很多的.

命题 7.1 若$f\in R([a,b])$,则$f(x)$的连续点在$[a,b]$中稠密,即$[a,b]$中的任一小子区间中都有$f(x)$的连续点.

证明 假定$[a_1,b_1]$是$[a,b]$中任取的一个小子区间.因为$f\in R([a,b])$,所以对$\varepsilon_1=\frac{1}{2}$,存在对$[a_1,b_1]$的满足$\|\Delta_1\|<\frac{1}{2}(b_1-a_1)$的分划$\Delta_1$,使得

$$\sum\nolimits^{(1)}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon_1(b_1-a_1).$$

这里$\sum^{(1)}$表示对分划Δ_1的分点指标求和.

由此可知,必有指标i_1,使得$\omega_{i_1}<\varepsilon_1$.为方便计,记$\omega_{i_1}$为$\omega^{(1)}$,其所在的区间$[x_{i_1-1},x_{i_1}]$记为$[a_2,b_2]$,显然有

$$b_2-a_2<\frac{1}{2}(b_1-a_1),\quad \omega^{(1)}<\varepsilon_1=\frac{1}{2}.$$

又因为$f\in R([a_2,b_2])$,所以对$\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$,存在对$[a_2,b_2]$的满足$\|\Delta_2\|$

$<\frac{1}{2}(b_2-a_2)$的分划 Δ_2，使得

$$\sum\nolimits^{(2)} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon_2 (b_2 - a_2).$$

与前述推理相同，此时必有 Δ_2 中的某个子区间，且记为$[a_3, b_3]$，使得 $f(x)$在其上的振幅(记为 $\omega^{(2)}$)小于 ε_2. 易知

$$b_3 - a_3 < \frac{b_2 - a_2}{2} < \frac{b_1 - a_1}{2^2}, \quad \omega^{(2)} < \varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}.$$

再以同样操作处理$[a_3, b_3]$，并依次进行下去，可得

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

$$b_n - a_n < \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad \omega^{(n)} < \varepsilon_n = \frac{1}{2^n}.$$

根据区间套定理可知，存在 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$. 易知$f(x)$在点 $x=\xi$ 处的振幅为零：

$$\omega_f(\xi) = 0.$$

这说明 $x=\xi$ 是$f(x)$的连续点.

由于两个连续函数的复合函数也是连续函数，故该复合函数仍是可积的. 下述结果说明，这一条件尚可减弱.

命题 7.2 设 $f \in R([a,b])$，且有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$. 又设 $\varphi \in C([m,M])$ 则 $\varphi[f(x)]$在$[a,b]$上可积.

证明 (1) 因为 $\varphi(y)$在$[m,M]$上一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $y_1, y_2 \in [m,M]$且$|y_1 - y_2| \leqslant \delta$ 时，有

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \varepsilon.$$

(2) 由$f(x)$的可积性知道，对上述 $\delta>0$ 以及任意的 $\sigma>0$，存在$[a,b]$的分划 Δ，使其子区间分属两类：

(A) 在每个子区间上，$f(x)$的振幅大于 δ 的这些子区间长度的总和小于σ；

(B) 不属于(A)类的子区间.

(3) 令 $F(x)=\varphi[f(x)]$，它在$[a,b]$上的振幅记为 $\Omega(F)$，且对此分划 Δ 的第 i 个子区间上的振幅记为 $\omega_i(F)$，由于在(B)类的每个子区间上，$f(x)$的振幅小于或等于 δ，故 $F(x)$在其上的振幅小于 ε.

从而我们有

$$\sum_{\Delta} \omega_i(F)\Delta x = \sum_{(A)} \omega_i(F)\Delta x_i + \sum_{(B)} \omega_i(F)\Delta x_i$$
$$\leqslant \Omega(F) \sum_{(A)} \Delta x_i + \varepsilon \sum_{(B)} \Delta x_i < \Omega(F)\sigma + \varepsilon(b-a).$$

由此易得 $F\in R([a,b])$.

注 (1) 记 $R(x)$是$[0,1]$上的 Riemann 函数,又定义 $g(0)=0,g(x)=1\ (0<x\leqslant 1)$,则复合函数 $g[R(x)]$在$[0,1]$不可积. 进一步还有

(2) 记 $Q=\{r_n\},G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_n-2^{-2n},r_n+2^{-2n}),E=[0,1]\backslash G$,并作函数

$$f(x)=\inf\{|x-y|,y\in E\}.$$

易知,$f\in C([0,1])$(实际上属于 Lip1). 又作函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1,x=0;\\0,x\neq 0,\end{cases}$$

则 $\varphi[f(x)]$在$[0,1]$上不可积.

例(Jesen 积分不等式) 设 $f\in R([0,1])$,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in([0,1])$,又有连续函数 $\varphi(x)$在$[m,M]$上是(下)凸的,则

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_0^1\varphi[f(x)]\mathrm{d}x.$$

证明 将$[0,1]n$ 等分,即

$$\Delta x_i=\frac{1}{n};\ x_i=\frac{i}{n}\ (i=0,1,\cdots,n),$$

取插点为 $\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$. 又由 $\varphi(x)$在$[m,M]$上的凸性不妨假定 $\varphi\in C([m,M])$,则

$$\varphi\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\right)\leqslant\frac{\varphi[f(x_1)]+\varphi[f(x_2)]+\cdots+\varphi[f(x_n)]}{n}$$

即

$$\varphi\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right]\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi[f(x_i)]\frac{1}{n}.$$

注意到 $\varphi(x)$的连续性以及 $\varphi[f(x)]$的可积性,当 $n\to\infty$时有

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_0^1\varphi[f(x)]\mathrm{d}x.$$

可积函数与连续函数有着密切的关系,即从平均(积分)的观点看,连续函数可以充分接近可积函数,这一结论为许多问题的研究提供了极大的方便.

命题 7.3 设 $f\in R([a,b])$,则对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $g\in C([a,b]),f(b)=g(b),f(a)=g(a)$,使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证明 由$f(x)$的可积性知道,对任给的 $\varepsilon>0$,存在分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$.

现在,在$[a,b]$上作连续函数$g(x)$如下:

$$g(x)=f(x_{i-1})+\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1}),$$

$$x\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n).$$

即在每个区间$[x_{i-1},x_i]$上,$g(x)$是连结两点$(x_{i-1},f(x_{i-1}))$与$(x_i,f(x_i))$的直线. 易知

$$|f(x)-g(x)|<\omega_i(f),x\in[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots,n).$$

从而有

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

命题7.4 若 $f\in R([a,b])$,则存在 $g_k\in C([a,b])$ $(k=1,2,\cdots)$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b|f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明 取 $\varepsilon_k=\frac{1}{k}$ $(k=1,2,\cdots)$,则按命题 7.3 可知,存在 $g_k\in C([a,b])$,使得

$$\int_a^b|f(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x<\frac{1}{k}.$$

令 $k\to\infty$,即得所证.

命题7.5 设 $f\in R([a,b])$,则

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

其中假定对任意的 $h>0$, $f(b+h)=f(b)$, $f(a-h)=f(a)$.

证明 由命题 7.3 可知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $g\in C([a,b])$,使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.$$

约定对任意的 $h>0$,令 $g(b+h)=g(b)$, $g(a-h)=g(a)$. 注意到 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$,我们有

$$\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}x=\int_{a+h}^{b+h}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现在,根据$g(x)$的一致连续性可知,对任给的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$|h|<\delta$时,有

$$|g(x+h)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}(b-a).$$

于是得到

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}x$$
$$+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)=\varepsilon.$$

命题7.6 若$f\in C([a,b])$,则对任给的$\varepsilon>0$,存在$[a,b]$上的阶梯函数$\varphi(x)$,使得

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

(所谓$[a,b]$上的阶梯函数,是指定义在$[a,b]$上的有限分(区间)段函数,在每一小段区间上,该函数是一个常数)

证明 由题设可知,对任给的$\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的分划

$$\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

现在作阶梯函数$\varphi(x)$如下:

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x_{i-1}), & x\in[x_{i-1},x_i);\\ f(x_n), & x\in[x_{n-1},x_n],\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n-1).$$

我们有

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

即得所证.

(三)关于微积分基本定理

大家知道对一个$[a,b]$上的可微函数$f(x)$,只有在$f'(x)$在$[a,b]$上可积时,才可得

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

但在1881年就有意大利数学家Volterra(伏尔泰拉)举出一例,指出即使导函数$f'(x)$有界,此导函数也不一定可积(参阅美国数学月刊81(1974),P. 349－353).这说明N-L公式在使用上还有较大限制,积分尚需进一步改造,且后来也发展出众多新的近代积分理论.

命题7.7 设$F(x)$在$[a,b]$上可微,则$F'\in R([a,b])$的充分必要条件是:存在$g\in R([a,b])$,使得

$$F(x) = F(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t. \tag{①}$$

证明 必要性.取$g(x)=F'(x)$即可.

充分性.假定式①成立,且令m,M为$g(x)$在$[a,b]$上的下、上确界,作函数

$$G(x) = F(x) - F(a) - m(x-a) = \int_a^x [g(t)-m]\mathrm{d}t,$$

易知$G'(x)=F'(x)-m\geqslant 0$,即$F'(x)\geqslant m$.同理可证$F'(x)\leqslant M$.

这就是说,在同一区间上$F'(x)$的振幅不超过$g(x)$的振幅.从而由$g\in R([a,b])$可知$F'\in R([a,b])$.

因此,对$f\in R([a,b])$,其变限积分$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$不一定可微,即使可微也不一定是$f(x)$的原函数(除非单调),如$R(x)$,它没有原函数,但$F(x)\equiv 0$.这是因为有原函数的可积函数,其原函数必为变上限积分.

(四) 关于变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$、原函数

1. 当$f\in R([a,b])$时,$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$[a,b]$上的连续函数.若$f\in([a,b])$,则$F'(x)=f(x)$.也就是说,变上限积分作为一种新函数可以表达出$f(x)$的一个原函数,这应引起大家充分的重视,并去挖掘它的表现功能.

例1 任一多项式$P(x)$均可表为两个递增多项式的差.

实际上我们有$P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$;

$$Q_1(x) = P(0) + \frac{1}{2}\int_0^x \{[P'(t)]^2 + P'(t) + 1\}\mathrm{d}t,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \{[P'(t)]^2 - P'(t) + 1\}\mathrm{d}t.$$

例2 设$f\in C([a,b])$,若对满足$g(a)=g(b)=0$的任意的$g\in$

$C^{(1)}([a,b])$，都有

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=0.$$

则$f(x)=l$(常数)，$x\in[a,b]$.

证明 记 $l=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，显然有

$$\int_a^b [f(x)-l]\mathrm{d}x=0.$$

作函数

$$g(x)=\int_a^x [f(t)-l]\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].$$

易知 $g(a)=g(b)=0$，且 $g'(x)=f(x)-l$(属于 $C^{(1)}([a,b])$)，从而根据题设可得

$$\int_a^b f(x)[f(x)-l]\mathrm{d}x=0.$$

由此可知

$$\int_a^b [f(x)-l]^2\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)[f(x)-l]\mathrm{d}x-l\int_a^b [f(x)-l]\mathrm{d}x=0.$$

因此，$f(x)=l$. $x\in[a,b]$.

2. 大家知道，$[a,b]$上的连续函数是有原函数的. 不过，不连续函数(当然没有第一类间断点)也可以有原函数.

例 3 函数$f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0 & x=0\end{cases}$

在$[0,1]$上有原函数. 事实上，作函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad h(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $h(x)$(连续函数)是有原函数的，又由

$$g'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

可知$f(x)=g'(x)-h(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. 这说明$f(x)$存在原函数.

3. 关于函数乘积的原函数

在介绍分部积分公式二时，曾经指出，即使$f(x)$与$g(x)$各自在$[a,b]$上存在原函数，但乘积 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$在$[a,b]$上也不一定存在原函

数. 现举例如下:

例 4 设$f(x)=\begin{cases}x^2\sin x^{-3}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$

$$G(x)=\begin{cases}x^2\cos x^{-3}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则易知

$$f(x)G'(x)=\begin{cases}2x^3\sin x^{-3}\cos x^{-3}+3\sin^2 x^{-3}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f'(x)G(x)=\begin{cases}2x^3\sin x^{-3}\cos x^{-3}-3\cos^2 x^{-3}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

从而

$$\Phi(x)=f(x)G'(x)-f'(x)G(x)=\begin{cases}3, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

注意到$f(x)G'(x)+f'(x)G(x)=[f(x)G(x)]'$可知,若$f(x)G'(x)$与$f'(x)G(x)$中有一个具有原函数,则另一个也必有原函数. 由此立即推出$\Phi(x)$具有原函数. 然而$\Phi(x)$是没有原函数的(第一类间断点). 这矛盾说明,$f(x)g(x)$与$f'(x)G(x)$皆无原函数.

当然,在条件加强时,情况又不同了,请看下例.

例 5 设$f(x)$在$[a,b]$上有原函数$F(x)$,$g(x)$在$[a,b]$可微,且$g'\in R([a,b])$,则乘积函数

$$\varphi(x)=f(x)g(x),x\in[a,b]$$

有原函数.

证明 注意到$F'(x)=f(x)$,则在$(F(x)g(x))'=f(x)g(x)+F(x)g'(x)$中多出一项$F(x)g'(x)$,猜想$\int_a^x F(t)g'(t)\mathrm{d}t$也许是$F(x)g'(x)$的"原函数". 从而令

$$\Phi(x)=F(x)g(x)-\int_a^x F(t)g'(t)\mathrm{d}t,$$

并作差商$\left(注意\int_x^{x+h}g'(t)\mathrm{d}t=g(x+h)-g(x)\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}&=\frac{g(x+h)F(x+h)-g(x)F(x)}{h}-\frac{1}{h}\int_x^{x-h}F(t)g'(t)\mathrm{d}t\\&=g(x+h)\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&\quad-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[F(t)-F(x)]g'(t)\mathrm{d}t=\text{I}+\text{II}.\end{aligned}$$

易知对Ⅰ,我们有

$$\lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=g(x)F'(x)=g(x)f(x).$$

对Ⅱ,不妨设 $|g'(x)|\leqslant M\ (a\leqslant x\leqslant b)$,又注意到 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性,可知对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|h|<\delta$ 时,有

$$|F(t)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{M},\quad x\leqslant t\leqslant x+h.$$

由此可得 $|\text{Ⅱ}|<\varepsilon$.

综上所述,我们得到

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(x)g(x)=\varphi(x),x\in[a,b].$$

这说明 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数.

(五) 余项是积分形式的 Taylor 公式

在本教材的第一册中,曾经介绍过两种余项形式的函数的 Taylor 公式. 现在应用分部积分公式,我们在这里再给出另一种余项形式的 Taylor 公式,它将在后文 Taylor 级数中发挥作用.

命题 7.8(余项是积分形式的 Taylor 公式) 设 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在,且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积,则对 $[\alpha,\beta]$ 中任意的 a,x,使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t. \qquad ②$$

证明 采用归纳法,在 $n=0$ 时,易知

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

即式②对 $n=0$ 成立.

现在假定式①对 $n=m$ 成立,现证对 $m+1$ 也真. 注意到此时 $f^{(m+1)}(x)$ 是可积函数 $f^{(m+2)}(x)$ 的原函数,故由分部积分法可知

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}\mathrm{d}t\\
&=\int_a^x f^{(m+1)}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}\right)\mathrm{d}t\\
&=-f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}\Big|_a^x+\frac{1}{(m+1)!}\int_a^x (x-t)^{m+1}f^{(m+2)}(t)\mathrm{d}t.\\
&=f^{(m+1)}(a)\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+1)!}\int_a^x (x-t)^{m+1}f^{(m+2)}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

再代入式②,可知

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}+\frac{1}{(m+1)!}\int_a^x(x-t)^{m+1}f^{(m+2)}(t)\mathrm{d}t,$$

即式②对 $m+1$ 成立. 这就证明了式②对一切 n 皆成立.

命题 7.9(Cauchy 余项) 在 $f^{(n+1)}(x)$ 连续的条件下,其余项还可写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}.$$

证明 应用积分中值公式于式①,可得

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a),$$

$$\xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

由此又导出 $x-\xi=x-a-\theta(x-a)=(x-a)(1-\theta)$,代入上式,即得所证.

(六) 求积思想发展史简介

我国古代数学家祖冲之、祖暅父子(公元五、六世纪)曾对求立体体积提出一个著名原理:"幂势既同则积不容异."即指两个同高的立体,若对它们所作的任一等高平行截面的面积相等,则此两立体体积不可能不相等. 祖氏父子在这里提出了一种比较规则:比较两立体的(等高)平行截面的面积(根据这一思想,祖氏父子纠正了《九章算术》中一个关于球体积的计算失误). 现在,我们已经学会求曲边图形围成的区域面积,从而通过积分(即积累)就可求出某些单个立体的体积了.

17 世纪,意大利数学家 Cavalieri(卡瓦累里)也提出了类似的求积思想. 与祖氏父子稍有不同的是,他引进了称之谓"不可分量"的观念. 例如一个平面区域是由许许多多挤在一起的平行线段合并而成的,这些平行线段就是"不可分量"(图 7-36),因此,若两个平面区域的"不可分量"全同,则面积相等. 根据这一思想,他也正确地求出过由某些曲线围成的区域面积. 然而不久,这一"不可分量"学说就受到了责难. 例如有两个三角形 ABD 与 ACD(图 7-37),底边长 $\overline{BD}$ 是 $\overline{CD}$ 的两倍,但高均为 AD. 显然,这两个三角形面积是不能相等的. 但从"不可分量"观点看,对三角形 ABD 中任一不可分量 $\overline{ab}$,在三角形 ACD 中均有唯一且是相同的不可分量 $\overline{\alpha\beta}$ 对应,反之亦然. 因此,它们就有相同的面积,这导致了谬误. 那么问题出在什么地方? 原因如下:就以线段为例,上述一一对应实际上指的是线段 $\overline{BD}$ 与 $\overline{CD}$ 上的点的对应关系, 它说明两者的基数 (点的个数概念

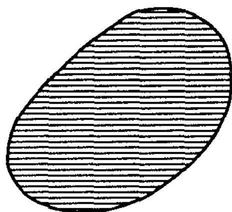


图 7-36

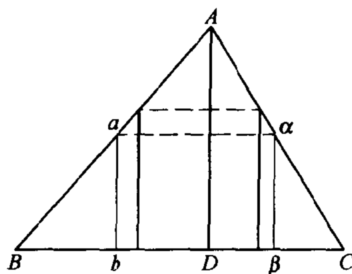


图 7-37

的推广)相同. 但基数与长度是不同的概念，这一问题的核心是如何正确认识“无穷”的概念，或说如何才能在数学中科学地引进“无穷”的概念. 一个线段的面积是 0，想用无穷个 0 随便“和”起来变成非 0 是不符合认识规律的.

19 世纪，在有了用 $y=f(x)$ 表示连续曲线的基础，以及采用极限作无穷运算的理论后，求积的思路又从古代的方法中吸取了营养，即采用有限分割、局部以直代曲，作和取极限的格式.

(七) 与求积相关的一些内容

1. 利用本章第 8.1 节公式①，可得著名的 Hölder 不等式：设 f、$g\in C([a,b])$，且有

$$\|f\|_p \xlongequal{\text{def}} \left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}>0,\quad \|g\|_q \xlongequal{\text{def}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}>0.$$

若在第 8.1 节式①中取

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

则式①成为

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

对上式两端在 $[a,b]$ 上作积分，我们有

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}\frac{\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x}{\|g\|_q^q},$$

注意到 $\|f\|_p^p=\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x$，可知

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

即得(Hölder① 不等式)

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\left(p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

2. 在直角坐标系中,曲线 $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 绕直线 $y=mx+k$ 旋转的旋转体体积为

$$V=\frac{\pi}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b[f(x)-mx-k]^2[1+mf'(x)]\mathrm{d}x.$$

此外,设两条曲线在极坐标系中表示为

$$r=f(\theta),\ r=g(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

且 $f(\theta)\geqslant g(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则其所围图形绕极轴旋转的旋转体体积为

$$V=2\pi\int_\alpha^\beta\left(\int_{g(\theta)}^{f(\theta)}r^2\mathrm{d}r\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

3. 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的周长化归为椭圆积分,它在天文学中有重要应用.

实际上,只需计算该椭圆在第一象限中的弧长 s_1. 取椭圆的参数方程为

$$x=5\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},$$

我们有

$$s_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\cos^2 t}\ \mathrm{d}t.$$

注 (椭圆周长的估计) 设一椭圆的短轴为 a,长轴为 b,周长记为 S,则

$$\pi(a+b)\leqslant S\leqslant\sqrt{2}\pi\ \sqrt{a^2+b^2}.$$

实际上,由公式

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

可知(Cauchy-Schwarz 不等式)

$$S^2\leqslant 2\pi\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)\mathrm{d}t=2\pi^2(a^2+b^2),$$

$$S\leqslant\sqrt{2}\pi\ \sqrt{a^2+b^2}.$$

① 霍尔德(1859～1937),德国数学家.

另一方面,由公式($0\leqslant\tau\leqslant 1$)

$$a\tau+b(1-\tau)=a\sqrt{\tau}\sqrt{\tau}+b\sqrt{1-\tau}\sqrt{1-\tau},$$

$$[a\tau+b(1-\tau)]^2\leqslant[a^2\tau+b^2(1-\tau)][\tau+(1-\tau)]$$

$$=a^2\tau+b^2(1-\tau);$$

$$\sqrt{a^2\tau+b^2(1-\tau)}\geqslant a\tau+b(1-\tau),$$

可知(令 $\tau=\sin^2 t$)

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt\geqslant\int_0^{2\pi}[a\sin^2 t+b(1-\sin^2 t)]dt=\pi(a+b).$$

(八) π 是无理数的证明

假定 π 是有理数:$\pi=\dfrac{a}{b}$(a,b 是互素正整数). 作函数

$$f(x)=\frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n,$$

$$g(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x).$$

显然,$f^{(2n+1)}(x)\equiv 0$,且有

$$g''(x)=f^{(2)}(x)-f^{(4)}(x)+\cdots.$$

由此可知 $g''(x)+g(x)=f(x)$以及

$$[g'(x)\sin x-g(x)\cos x]'=[g''(x)+g(x)]\sin x=f(x)\sin x.$$

对上式两端在$[0,\pi]$上作积分,我们有

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx=g(\pi)+g(0).$$

因为 $f(\pi-x)=f\left(\frac{a}{b}-x\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b}-x\right)^n\left[a-b\left(\frac{a}{b}-x\right)\right]^n=f(x)$,所以 $f^{(2k)}(\pi-x)=f^{(2k)}(x)$, $f(\pi)=f(0)$, $f^{(2k)}(\pi)=f^{(2k)}(0)$, 从而推出 $g(\pi)=g(0)$是整数,也就是说$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$ 是整数.

但是,另一方面由

$$0<\sin x\leqslant 1,\ 0<x<\pi;\ 0<\frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n<\frac{\pi^n a^n}{n!},$$

得到 $0<f(x)\sin x<\dfrac{\pi^n a^n}{n!}$,从而导出

$$0<\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx<\frac{\pi^n a^n}{n!}\pi.$$

矛盾.

实际上,π、e 都是超越数.

第八章　反常积分

上一章介绍的 Riemann 积分，被积函数必须是有界的，积分变量的活动范围也是有界的(即在$[a,b]$区间中). 然而，无论从积分(如上限为变量的不定积分)作为一种研究函数的手段，还是从实际问题的建模需要或估算的角度来看，对区间上定义的无界函数，以及当积分区间是无界的情形，也都需要赋予它们某种适当的求积意义.

例如，在宇宙速度的估算(见上一章 8.6 节例 7)中指出，欲将质量为 m 的火箭从地面送到空中高为 h 的位置，须做功

$$W_h=\int_R^{R+h} G\,\frac{Mm}{y^2}\mathrm{d}y=mgR^2\int_R^{R+h}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y.\ (R\text{ 为地球半径})$$

为使火箭飞离地球，可用求 $h\to+\infty$的极限的方法：

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+\infty} W_h &= \lim_{h\to+\infty} mgR^2\int_R^{R+h}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\\ &=mgR^2\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=mgR.\end{aligned}$$

上述运算的核心是探讨

$$\lim_{h\to+\infty}\int_R^{R+h}\frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

不妨记为

$$\int_R^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

这就是所谓无穷区间上积分的一个模型.

再从积分的几何意义——面积来考察无穷区间上的积分，例如对

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\arctan A=\frac{\pi}{2},$$

如图 8-1 所示,是曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,A]$ 上的下方图形的面积,图 8-2 可视为该曲线在 $[0,+\infty)$ 上的下方图形面积.这一想像也是符合思维规律的.

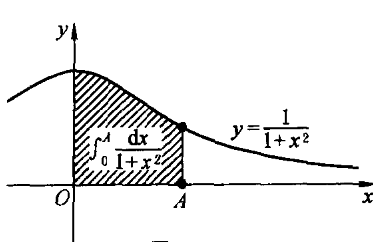


图 8-1

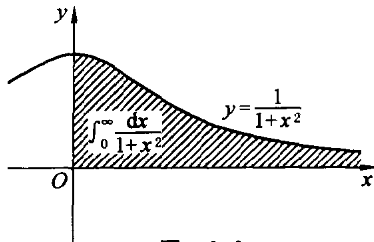


图 8-2

从这一意义上讲,还可类似地考察积分

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

的意义.在这里,被积函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x=1$ 处没有定义,且是 $[0,1)$ 上的无界函数(即使约定 $f(1)=l$ 也无济于事).因此,在正常的积分意义下,其积分是不存在的.但是,我们注意到,对任意的 ε: $0<\varepsilon<1$, $f(x)$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上是可积的($f(x)$ 是连续函数),即积分

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\varepsilon)$$

对任意的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 是存在的,这就诱发我们去考察 $\varepsilon\to0$ 时的极限,得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2},$$

并认为这就是 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的积分意义.虽然这不是通常意义下的积分,但其认识的合理性还可从下面的角度来理解:

当$f(x)$在$[0,1]$上可积时,我们知道其变上限积分

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

是关于 x 的$[0,1]$上的连续函数,由此可知

$$\lim_{x\to 1-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

也就是说,当$f(x)$在$[a,b]$上按通常 Riemann 意义下可积时,两者是一致的.

上述积分的思想是 Cauchy 引入的,因此也称为在 Cauchy 意义下的积分. 本章的目的就是要介绍这两类反常积分.

§1 函数在无穷区间上的积分

1.1 无穷区间上的积分定义

定义 8.1 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义,且对任意的 A: $a<A$,均有 $f\in R([a,A])$. 若存在极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x, \qquad ①$$

则称$f(x)$在$[a,+\infty)$上的(**反常**[①]**)积分存在**或**收敛**,且记其极限值为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x.$$

此时亦称$f(x)$在$[a,+\infty)$上是可积的. 若式①中的极限不存在(包括极限为无穷的情形),则称$f(x)$在$[a,+\infty)$上的(反常)积分发散,有时也约称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地,对于定义在$(-\infty,b]$上的函数$f(x)$,它对任意的 B: $B<b$,均有 $f\in R([B,b])$,若存在极限

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad ②$$

① Improper. 在许多中文书刊中,也称无穷区间上的积分为广义积分.

则称$f(x)$在$(-\infty,b]$上的(反常)积分存在或收敛，且记其极限值为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

此时也称$f(x)$在$(-\infty,b]$上可积. 若式②中极限不存在，则称$f(x)$在$(-\infty,b]$上的(反常)积分$\left(\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right)$发散.

注意，在本章中，凡在一般情形中提到$f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$时，如无特别说明，均指上述定义所界定者. 此时，由定义立即可知，对于任意取定的b:$b>a$，下述两个积分

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{b}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

的收敛性是一致的. 对于在$(-\infty,b]$上的$f(x)$的积分也同此理.

例 1 考察积分(俗称 p-积分)

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x,\quad -\infty<p<+\infty.$$

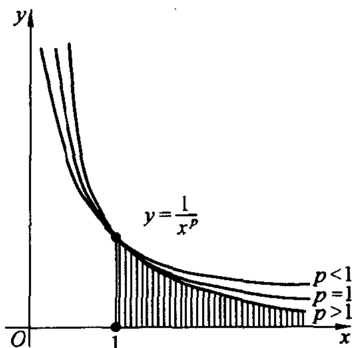


图 8-3

解 (1) $p\neq1$时，有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x^{p}}=\begin{cases}\dfrac{-1}{1-p}, & p>1;\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

因此，当$p>1$时I收敛；$p<1$时I发散.

(2) $p=1$时，有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{A\to+\infty}\ln A=+\infty.$$

因此，I发散.

例 2 积分$I=\int_{0}^{+\infty}\cos 2x\mathrm{d}x$是发散的.

证明 因为对任意的A:$A>0$，有

$$\int_{0}^{A}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\sin 2A}{2},$$

而当 $A\to+\infty$时，上式的极限不存在，所以积分 I 是发散的.

定义 8.2 设$f(x)$是定义在$(-\infty,\infty)$上的函数. 对任意的 A,B，有 $f\in R([B,A])$. 若存在极限

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^C f(x)\mathrm{d}x,\quad \lim_{A\to+\infty}\int_C^A f(x)\mathrm{d}x, \qquad ③$$

其中 C 为某个实数，则称$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的(反常)积分存在或收敛，且记其极限值为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{B\to-\infty}\int_B^C f(x)\mathrm{d}x+\lim_{A\to+\infty}\int_C^A f(x)\mathrm{d}x. \qquad ④$$

若式③中的极限有一个不存在(包括极限为无穷的情形)，则称 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的(反常)积分$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)$发散.

注意，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性及其数值与式④中所取的点 C 无关.

推论 8.1 类(Newton-Leibniz 公式) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分收敛，且 $F(x)$是$f(x)$在$[a,+\infty)$上的原函数，则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)\xlongequal{\text{def}}F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

对于$f(x)$在$(-\infty,b]$上收敛的积分，也有相应的性质：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(-\infty)\xlongequal{\text{def}}F(x)\Big|_{-\infty}^{b},$$

其中 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

例 3 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

证明 易知$\frac{1}{x^2+4x+9}$在$(-\infty,\infty)$上的原函数是 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}$. 从而有

$$I=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}=F(x)\Big|_{-\infty}^{0}+F(x)\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{A\to+\infty}\arctan\frac{A+2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{B\to-\infty}\arctan\frac{B+2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,且$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,试求

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$;　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$.

2. 设 $f(x)>0$, $\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,试问$\int_{1}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$, $\int_{1}^{+\infty}f^3(x)\mathrm{d}x$收敛吗? $\left(\text{提示:考察} f(x)=n^2\left(n\leqslant x<n+\frac{1}{n^4}\right),\right.$ $f(x)=o\left(n+\frac{1}{n^4}\leqslant x<n+1\right)$; $f(x)=n\left(n\leqslant x<n+\frac{1}{n^3}\right)$, $f(x)=0$ $\left.\left(n+\frac{1}{n^3}\leqslant x<n+1\right)\right)$

1.2 积分的基本性质

无论是在$[a,+\infty)$上还是在$[-\infty,b)$上,$f(x)$的积分的收敛性均是由变(上、下)限积分的极限来界定的.其中的基础是计算$f(x)$在内部区间上的通常意义下的 Riemann 积分.因此,关于 Riemann 积分的许多运算性质可自然地扩展到反常积分上来,其证明也雷同.这些性质为估算反常积分提供了极大的方便,现列如下:(证明略)

1. (线性性质) 若积分$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{a}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则对任意的实数 α 以及 β, $\alpha f(x)+\beta g(x)$在$[a,+\infty)$上的积分也收敛,且有

$$\int_{a}^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_{a}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.$$

2. (换元公式) 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可积,$\varphi(t)$是$[\alpha,\beta]$(包括$\beta=+\infty$的情形)上连续可微的严格单调函数,而且

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)\leqslant\lim_{t\to\beta-}\varphi(t)=+\infty,$$

则等式

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

在左、右端积分之一收敛时成立.又当其中一个积分发散时,另一个积分也发散.

对于$f(x)$在$(-\infty,b]$上的积分,也有相应的性质.

注 上述换元公式中右端积分的被积函数可能出现无界的情形,而关于无界函数的反常积分将在下一节中介绍.两种反常积分在换元法实施过程中的交换,也会给我们带来估算的方便.

3. (分部积分公式) 设$u(x),v(x)$在$[a,+\infty)$上连续可微,且存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)v(x),$$

则等式

$$\int_a^{+\infty}u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\left(u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}u(x)v(x)-u(a)v(a)\right)$$

在左、右端积分之一收敛时成立.又若其中之一积分发散时,另一个积分也发散.

对于$f(x)$在$(-\infty,b]$上的积分,也有相应的性质.

注 类似于 Riemann 积分中分部积分公式的推广形式,对反常积分的分部积分公式也还可减弱其中的条件.

例 1 考察积分$I=\int_2^{+\infty}\frac{3x^2+2x-1}{(x^2-1)(x+1)^2}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 因为我们有

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x^2-1)(x+1)^2}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{(x+1)^2},$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\bigg|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 3,$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x+1}\bigg|_2^{+\infty}=\frac{1}{3},$$

所以积分 I 收敛且 $I=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{2}{3}$.

例 2 考察积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ 的敛散性.

解 作变量替换 $x=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{dt}{t^2}$,且新的积分限成为 $\alpha=1,\beta=0$. 我们有

$$I=-\int_1^0\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right)\bigg|_0^1=\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

例 3 计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

解 采用分部积分法,视 $u(x)=\arctan x$, $dv(x)=\frac{dx}{x^2}$,则 $du=\frac{dx}{x^2+1}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$. 因此,

$$I=-\frac{\arctan x}{x}\bigg|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\bigg|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}.$$

注 在分部积分的分项操作中,若不满足公式(3 中)所要求的条件,是不能把无穷限当作普通(实数)上限分别演算的,而必须回到原来的极限定义,请看

例 4 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

解 对任意的 $A>0$,我们有

$$\int_0^A \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$$

$$=\int_0^A dx\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=\frac{x}{1+e^{-x}}\Big|_0^A-\int_0^A\frac{dx}{1+e^{-x}}$$

$$=\frac{Ae^A}{1+e^A}-\int_0^A\frac{e^x}{1+e^x}dx=A-\frac{A}{1+e^A}-\ln(1+e^A)+\ln 2$$

$$=A-\frac{A}{1+e^A}-A-\ln(1+e^{-A})+\ln 2.$$

$$I=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{A}{1+e^A}-\ln(1+e^{-A})+\ln 2\right]$$
$$=\ln 2.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 计算下列反常积分:

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}(ab\neq 0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; (4) $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; (6) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

2. 设$\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{2x+1}\right)dx$ 收敛,试求 c 之值.

3. 求曲线 $y=e^{-x}(x\geqslant 0)$绕 x 轴旋转的旋转曲面面积.

4. 设 $f\in C^{(1)}([1,\infty))$,且$\int_1^{+\infty}f(x)dx$,$\int_1^{+\infty}f'(x)dx$ 收敛,试证明$f(x)\to 0(x\to+\infty)$.

§ 2 无穷区间上积分收敛与发散的判别法

从无穷区间上反常积分的定义中不难看出,该积分是否收敛取决于被积函数当 $x\to\infty$时的态势. 为便于研究,我们先考察函数值不变号的情况,这实际上就是归结为$f(x)\geqslant 0$ 的情形. 此时,重要的判别法是比较判别法. 有这一理论奠基,对于函数取

变号值的情况,最简便的办法是先取函数的绝对值使其转化为非负的情况. 当然这样做并不能根本解决问题,因为非绝对收敛时原反常积分仍可能收敛. 所以,问题又必须从极限理论的基础开始,即引进积分形式的 Cauchy 收敛准则. 考虑到这一准则在具体运用时的困难,我们还有基于 Abel 变换而针对乘积项反常积分的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

2.1 非负函数积分敛散性的比较判别法

比较判别法主要针对非负函数而言的,下面以$[a,+\infty)$为例论述判别法则,对$(-\infty,b]$的情形也有相应的结果.

定理 8.1(有界性定理) 非负函数$f(x)$的积分

$$I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的必要充分条件是:存在正数 M,使得对任意的 $A:A>a$,均有

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant M. \quad ①$$

证明 必要性. 假定 I 收敛,即存在极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{def}}M.$$

由于$f(x)$是非负的,故积分$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 随 A 增大而递增,故

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant M,(a<A).$$

充分性. 假定式①成立,则由$f(x)$的非负性,说明积分$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$随 A 增大而有上界. 由此知极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在,即 I 收敛.

例 1 设$f(x)$是$[1,\infty)$上的正值函数. 若$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{x^p}\mathrm{d}x,\left(p>\frac{1}{2}\right)$$

收敛.

证明 注意不等式

$$0\leqslant\int_1^A\frac{\sqrt{f(x)}}{x^p}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_1^A f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^A\frac{1}{x^{2p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

由题设以及$\frac{1}{x^{2p}}\left(p>\frac{1}{2}\right)$是可积函数,即知结论成立.

(一) 函数间的大小比较判别法

上述有界性定理的实质就是要控制在$[a,A]$上积分随A的增长度,从而首先想到的是,利用已知收敛的反常积分来作比较.

定理 8.2 设有定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数$f(x)$与$g(x)$,它们有关系:

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),\quad x\in[a,+\infty).$$

(1) 若$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2) 若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散.

证明 (1) 由题设以及定理 8.1 立即得知,当$A>a$时有

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^A g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.$$

这说明$f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分收敛,且$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 由题设知,积分$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$作为A的函数无上界,因此$\int_a^A g(x)\mathrm{d}x$也无上界. 由定理 8.1 可知,$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$发散.

例 2 积分$I=\int_1^{+\infty}x^4\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$是收敛的.

证明 因为我们有$\mathrm{e}^{x^2}>x^6$,$x\in(-\infty,\infty)$,所以可得

$$x^4\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant\frac{1}{x^2},\quad x\in[1,\infty).$$

从而由$\frac{1}{x^2}$在$[1,\infty)$上的积分收敛,可知 I 收敛.

例 3 积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

证明 (1) 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\mathrm{d}x$ 是收敛的,这是因为有不等式 $0\leqslant\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$,而$\frac{1}{x^2}$在$[1,\infty)$上的积分是收敛的.

(2) 注意到公式 $2\mathrm{d}\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$,我们有

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x&=2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)\\&=\frac{2}{x}\sin^2\frac{x}{2}\Big|_1^{+\infty}+2\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\mathrm{d}x\\&=-2\sin^2\frac{1}{2}+2\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由(1)知 I 收敛.

(3) 已知(第七章 4.2 节中的例 2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\sin(2n+1)x\mathrm{d}x=0,$$

(参见第七章 4.2 节 Riemann-Lebesgue 引理)故可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\mathrm{d}x=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x\\&+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\sin(2n+1)x\mathrm{d}x\to\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

从而我们有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

例 4 $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^{\ln x}}$收敛.

证明 只需注意不等式(x 适当大时)

$$(\ln x)^{\ln x}=x^{\ln(\ln x)}>x^2.$$

例 5 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}}<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

证明 我们有$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2\mathrm{e}}$以及$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x$.

2. 试证明下列等式:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

3. 设 $f\in C([1,\infty))$,且$f(x)\to 1\ (x\to+\infty)$,令 $F(x)=\int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t(\alpha>0)$,试证明

$$F(x)\sim\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}\ (x\to+\infty).$$

4. 设 $f\in C([0,\infty))$. 若$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 试证明 $\int_0^{+\infty}f(x+t)f(x)\mathrm{d}x(t>0)$收敛.(提示:应用 Cauchy 积分不等式)

(二) 函数间极限形式比较判别法

大家知道,$f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分之收敛与否,关键在于 $x\to+\infty$时$f(x)$的增长性态. 因此,在比较判别法的条件

$$f(x)\leqslant g(x),\quad x\in[a,+\infty)$$

中,实际上只需比较当 x 充分大时的情形. 即若存在 A:$A>a$ 时,有

$$f(x)\leqslant g(x)\text{或}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 1$$

就行了.于是就产生了下述结果:

定理 8.3(比较判别法的极限形式) 对于非负函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分,若存在$g(x)>0,x\in[a,+\infty)$,且存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l, \qquad ②$$

则当$l>0$时,积分$I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$J=\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$同收敛或同发散;当$l=0$时,若$J$收敛,则$I$收敛.若有$\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty\ (x\to+\infty)$,则当$J$发散时,$I$发散.

证明 在$l>0$时,由式②可知,存在$A:a<A<+\infty$,使得

$$\frac{1}{2}l<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}l;\ \ \frac{l}{2}g(x)<f(x)<\frac{3l}{2}g(x),\ \ A\leqslant x<+\infty.$$

由此,根据比较判别法定理立即可知,$f(x)$与$g(x)$在$[A,+\infty)$上的积分是同时收敛或同时发散的.从而在$[a,+\infty)$上也有相同结论.

在$l=0$时,由式②可知,存在$A:A>a$,使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon,\ \ f(x)<\varepsilon g(x),\ \ A\leqslant x<+\infty.$$

由此,根据定理8.2可知,若J收敛,则I收敛.

在$\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty\ (x\to+\infty)$的情形,必存在正数$M$以及$A$:$a<A<+\infty$,使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}>M,\ \ f(x)>Mg(x),\ \ A\leqslant x<+\infty.$$

由定理8.2可知,若J发散,则I发散.

推论 8.2 在上述定理中,取$g(x)=x^{-p}$,且存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=l>0,$$

则积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛当且仅当$p>1$.

例 6 积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^5-1}}$是发散的.

证明 因为取$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$时,我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{2x^5-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2-x^{-5}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以 I 发散.

例 7 考察积分 $I=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$, $-\infty<p,\ q<\infty$的收敛性.

解 (1) $p>1$. 此时令 $\varepsilon=p-1>0$,由

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}\ln^q x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}\ln^q x}=0,$$

可知 I 收敛.

(2) $p=1$. 此时作变量替换 $\ln x=t$,则得

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q}.$$

由此易知 $p=1$ 时,有结论:

$q>1$ 时,I 收敛;$q\leqslant 1$ 时,I 发散.

(3) $p<1$. 此时令 $\varepsilon=1-p>0$,由

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\frac{1}{x^{1-\varepsilon}\ln^q x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln^q x}=+\infty,$$

以及积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\mathrm{d}x,\ \ \varepsilon>0$$

发散,可知 I 发散.

思考练习 判别下列积分的敛散性:

1. $\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$; 2. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2-x+1}}$.

2.2 积分的绝对收敛

上节所介绍的积分比较判别法,是针对不变号的被积函数

而言的.对于函数值变号的反常积分,我们可以先取其绝对值变成非负函数,然后又可以应用比较判别法了.这就引发了反常积分绝对收敛的概念.

定义 8.3 设 $f\in R([a,A])$ (任意的 $A>a$).若积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x \qquad ①$$

收敛,则称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是**绝对收敛**的,此时也称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是绝对可积的.若①发散,而 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 为**条件收敛**.

定理 8.4 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分绝对收敛,则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分必收敛.

证明 注意到不等式 $0\leqslant|f(x)|-f(x)\leqslant 2|f(x)|$,即知积分

$$\int_0^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]\mathrm{d}x$$

收敛.再将 $f(x)$ 写成 $f(x)=|f(x)|-[|f(x)|-f(x)]$,就可得到 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分收敛的结论.

定理 8.5 设对任意的 $A>a$, $g\in R([a,A])$,且 $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上有界.若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,且有

$$\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

其中 $|g(x)|\leqslant M$ $(a\leqslant x<\infty)$.

证明 只需注意 $|f(x)g(x)|\leqslant M|f(x)|(a\leqslant x<\infty)$ 即可.

例 1 积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x(p>1)$ 是绝对收敛的.

证明 注意到不等式 $\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}$.根据比较判别法可知,$I$ 是绝对收敛的.

例 2 积分 $I=\int_1^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 是收敛的.

证明 应用变量替换 $x^2=t$ 以及分部积分法,可得

$$I=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos t}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_1^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t.$$

注意到上式右端的积分的绝对收敛性,即知 I 收敛.

例 3 积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的.

证明 由公式

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\geqslant 0,(x>0),$$

易知 $\int_{10}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,$\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散. 故积分

$$\int_{10}^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)\mathrm{d}x$$

发散. 由此知积分 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

注 至此,以 $\frac{\sin x}{x}$ 为例可知,一个收敛的反常积分不一定绝对收敛,可见绝对收敛的结论要比仅为收敛者更强. 虽然如此,前者仍不失为判别反常积分收敛的途径之一.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (2) $\int_2^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$. (提示:参阅本节例 2)

2. 设 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,若 $g\in R([1,A])$(对任意的 $A>1$),且 $|g(x)|\leqslant M,1\leqslant x<\infty$. 试问积分 $\int_1^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛吗? $\left(提示:f(x)=\frac{\sin x}{x},g(x)=\mathrm{sgn}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$

3. 设 $f\in C([1,\infty))$,且有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\quad 1\leqslant x<+\infty.$$

(1) 若 $\int_1^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty}|h(x)|\mathrm{d}x$ 皆收敛,试证明 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

(2) 若 $\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$ 皆条件收敛,试证明 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 设 $f\in C([0,\infty))$, $g(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的有界连续函数,若 $\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,试证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x+\lambda)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

5. 设 $f\in C([1,\infty))$. 若 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,试证明 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

6. 试证明积分 $\int_0^{+\infty}x\cos x^4\mathrm{d}x$ 收敛.(提示:作替换 $x^2=t$,化积分为 $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos t^2\mathrm{d}t$. 这一结论说明,对收敛的反常(无穷区间上)积分,其被积函数在 $x\to\infty$ 时不必趋于0,而且还可以是无界的. 当然,如果存在极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$,那么必有 $f(x)\to0(x\to\infty)$)

7. 设 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛且 $f\in C^{(1)}([1,\infty))$. 若 $|f'(x)|\leqslant M$,试证明 $f(x)\to0(x\to+\infty)$. $\left(\text{提示:}\int_A^{+\infty}f(x)f'(x)\mathrm{d}x\text{ 收敛}\right)$

2.3 被积函数的主部分离法

在极限形式

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\lambda}f(x)=l>0$$

的比较判别法中,本质上就是要比较$f(x)$与 $x^{-\lambda}$在 $x\to+\infty$时的大小. 因此,利用初等函数与幂函数的关系,先从$f(x)$中分离出主要部分(幂函数),无疑对数量结构较复杂的函数来说,是有所助益的. 即作分解

$$f(x)=g(x)+R(x),$$

使 $R(x)$的反常积分绝对收敛. 这样,$f(x)$与$g(x)$的反常积分将同时收敛或同时绝对收敛.

例 1 考察积分 $I=\int_1^{+\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$ 的收敛性和绝对收敛性.

解 首先,因为有

$$\left|\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\sim\left|\frac{\sin x}{x}\right|\quad(x\to+\infty).$$

所以 I 不是绝对收敛的.

其次,由于 $\tan y=y+R(y)$, $R(y)=O(y^3)\quad(y\to 0)$,故可得

$$\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}+R(x)$$

$$R(x)=O\left(\frac{1}{x^3}\right),\ (x\to+\infty);\ |R(x)|\leqslant\frac{M}{x^3},\ x\gg 1.$$

易知积分

$$I=\int_1^{+\infty}|R(x)|\mathrm{d}x,\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛,从而 I 收敛.

例 2 考察积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 因为 I 中的被积函数是负值,所以只需看广义积分

$$-I=\int_1^{+\infty}-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$$

的敛散性. 将被积函数写为

$$-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}=-\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p}$$

$$=-\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p}=\frac{1}{2x^{2+p}}+o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right)\ (x\to+\infty).$$

从而我们有

$$-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\sim\frac{1}{2x^{2+p}}\ (x\to+\infty).$$

这说明 $2+p>1$ 或 $p>-1$ 时,I 收敛;当 $p\leqslant-1$ 时 I 发散.

2.4 一般函数积分敛散性的判别法

这里所谓的一般判别法,是指被积函数可以变号的反常积分的判别方法,特别是那些条件收敛的反常积分.

(一) 积分收敛的充分必要条件

定理 8.6(Cauchy 收敛准则) 积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要充分条件是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 X:$a<X<\infty$,使得当 x',x'' 满足 $X<x'<x''<\infty$时,有

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\quad 或\quad \lim_{x',x''\to+\infty}\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x=0.\qquad ①$$

证明 记上限变量 x 的积分为 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛就是指存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

此即等价于:对任给 $\varepsilon>0$,存在 X:$X>a$,使得当 x',x''满足 $X<x'<x''<\infty$时,有

$$|F(x'')-F(x')|<\varepsilon.$$

此即不等式

$$\left|\int_a^{x''}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{x'}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

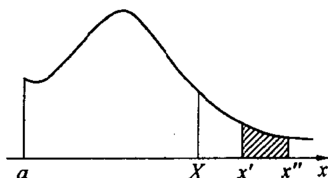


图 8-4

注意,上述 Cauchy 收敛准则是反常积分收敛的充分必要条件,因此还可用于判别反常积分的发散. 如图 8-4 所示,即若存在 $\varepsilon_0>0$,对于任给的 $X:a<X$,总存在 x',x'': $X<x'<x''<+\infty$,使得

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上的积分发散.

例 1 设 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是单调函数,且积分 $I=\int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x)=0$.

证明 不妨假定 $f(x)$ 是递增函数,因为 I 收敛,所以根据 Cauchy 收敛准则,在式①中取 $x'=x,x''=2x$,可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} t^\alpha f(x)\mathrm{d}t=0.$$

(1) 当 $\alpha\neq-1$ 时,由 $f(x)$ 的递增性可知

$$x^{\alpha+1}f(x)=\frac{\alpha+1}{2^{\alpha+1}-1}f(x)\frac{(2x)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$=\frac{\alpha+1}{2^{\alpha+1}-1}f(x)\int_x^{2x} t^\alpha\mathrm{d}t\leqslant\frac{\alpha+1}{2^{\alpha+1}-1}\int_x^{2x} t^\alpha f(t)\mathrm{d}t.$$

由此立即得出所要的结论.

(2) $\alpha=-1$ 的情形请读者自证.

例 2 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续可微,$g(x)$ 有界,$f'(x)\geqslant0$ 且 $f(x)\to0\ (x\to+\infty)$,则积分

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 对于充分大的 $x'<x''$,有

$$\int_{x'}^{x''} f(x)g'(x)\mathrm{d}x=[f(x)g(x)]\Big|_{x'}^{x''}-\int_{x'}^{x''} f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

根据 $g(x)$的有界性,对上式的第一项,可知

$$\lim_{x',x''\to+\infty}[f(x)g(x)]\Big|_{x'}^{x''}=\lim_{x',x''\to+\infty}[f(x'')g(x'')-f(x')g(x')]=0.$$

至于第二项,由于

$$\int_{x'}^{x''}f'(x)g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_{x'}^{x''}f'(x)\mathrm{d}x=g(\xi)[f(x'')-f(x')],$$

以及$g(x)$的有界性也可得$\lim\limits_{x',x''\to+\infty}\int_{x'}^{x''}f'(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. 因此,积分 I 收敛.

例3 设$f(x)$是$[0,\infty)$上的正值连续函数,且$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$收敛,则

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=+\infty.$$

证明 对任意的 $A>0$,我们有

$$\frac{A^2}{4}=\left(\int_{\frac{A}{2}}^A\sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\frac{A}{2}}^A\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right),$$

$$\frac{A}{4}\leqslant\left(\frac{1}{A}\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\frac{A}{2}}^A\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right).$$

由此易知结论成立.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 若$f(x)$在$[a,\infty)$上一致连续,则$f(x)\to0$ $(x\to+\infty)$. $\Big($提示:反之,不妨假定存在 $f(x_n)\geqslant\varepsilon_0>0$ $(n=1,2,\cdots)$,则存在 $\delta>0$,使得$f(x)>f(x_n)-\frac{\varepsilon_0}{2}$ $(x_n<x<x_n+\delta)\Big)$

2. 设 $f(x)\geqslant0$, $x\in[0,\infty)$, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n x f(x)\mathrm{d}x=0$. $\left(\text{提示:分段估计,其中}\frac{1}{n}\int_N^n x f(x)\mathrm{d}x\leqslant\right.$ $\left.\int_N^n f(x)\mathrm{d}x\right)$

3. 设 $f\in C([1,\infty))$,且$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则存在 $x_n\in[1,\infty)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$. $\left(\text{提示:注意,}\{x_n\}\text{可由 } f(x_n)=\right.$ $\left.\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\text{ 中产生}\right)$

4. 设积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 若当 $x\to+\infty$时,$xf(x)$递减趋于 0,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$. $\left(\text{提示:将}f(x)\text{写成}\frac{xf(x)}{x}\text{,参阅}\right.$ $\left.\text{本节例 1}\right)$

(二) 函数乘积积分的收敛判别法

在众多的反常积分中,被积函数往往是由多个不同类函数构成的. 由于它们之间在数量变化性态上的差异,给反常积分收敛性的判别带来了困难. 如果我们能从每个组成部分自身所具有的特征出发,就可判别其整体的广义积分的收敛性,那么当然是很理想的事情(如同分部积分公式所做的那样). 本节所介绍的两种判别法,正是从这一角度为反常积分的收敛性识别提供了方便.

定理 8.7(Dirichlet 判别法) 积分

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛的一个充分条件是:

(1) 设对任意的 $A:A>a$,$f\in R([a,A])$,且$f(x)$的变上限积分有界. 即存在正数 M,使得对任意的 $A:A>a$,有

$$\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M;$$

(当 $f\in C([a,\infty))$时,上述条件就是指其原函数有界)

(2) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调,且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

对于积分$\int_{-\infty}^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,其收敛的充分条件也类似.

证明 首先注意到,$f(x)$与$g(x)$在$[a,+\infty)$内的任一闭区间上均可积,从而由题设知,对任意的 $a<X<x'<x''<\infty$,可以建立第二中值公式:存在 $\xi:x'<\xi<x''$,使得

$$\int_{x'}^{x''} f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(x')\int_{x'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(x'')\int_{\xi}^{x''} f(x)\mathrm{d}x. \qquad ②$$

其次,对任给 $\varepsilon>0$,由(2)可知,存在 $X:X>a$,使得

$$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M},\ X<x<\infty.$$

又由(1)易知

$$\left|\int_{x'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{x'} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\left|\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{x'} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M.$$

同理也有$\left|\int_{\xi}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M$.应用上述不等式于②,可得

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(x')|\left|\int_{x'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(x'')|\left|\int_{\xi}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon(X<x'<x'').$$

根据 Cauchy 收敛准则,I 收敛.

例 4 积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x,\ 0<p<\infty$是收敛的.

证明 应用 Dirichlet 判别法,视$f(x)=\sin x$,其原函数有界;视$g(x)=\frac{1}{x^p}$,它在$[1,\infty)$上递减,且有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0,\ 0<p<+\infty.$$

这就证明了 I 收敛.

例 5 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上可微,且当 $x\to+\infty$ 时,$f'(x)$ 严格递增趋于 $+\infty$. 则积分

$$\int_a^{+\infty}\sin[f(x)]\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 令 $t=f(x)$,则由题设知,存在递增的反函数 $x=f^{-1}(t)$,$t\in[f(a),\infty)$ 且有

$$x\to+\infty\text{时},\ t\to+\infty,\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{f'[f^{-1}(t)]}.$$

$$\int_a^{+\infty}\sin[f(x)]\mathrm{d}x=\int_{f(a)}^{+\infty}\frac{\sin t}{f'[f^{-1}(t)]}\mathrm{d}t.$$

因为 $\sin t$ 的原函数是有界的,而 $\frac{1}{f'[f^{-1}(t)]}$ 是递减趋于零的,所以根据 Dirichlet 判别法,上述右端积分收敛. 由此知 I 收敛.

例 6 考察积分

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0)$$

的敛散性.

解 首先,用 Taylor 公式把被积函数写为

$$\frac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}=\frac{\sin x}{x^\alpha}\left[\frac{1}{1-\frac{\sin x}{x^\alpha}}\right]=\frac{\sin x}{x^\alpha}\left[1+\frac{\sin x}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin x}{x^\alpha}+\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$$

$$=\frac{\sin x}{x^\alpha}+\frac{1}{2x^{2\alpha}}-\frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\quad(x\to+\infty).$$

其次,根据 Dirichlet 判别法,积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x,\ \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)$$

都是收敛的. 又,积分

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right]\mathrm{d}x$$

在 $2\alpha>1$ 即 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时是收敛的;在 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时是发散的.这是因为余项 $R(x)=o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$ 在 $x\geqslant1$ 上连续,且有

$$\frac{1}{x^{2\alpha}}\sim\frac{1}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right),\quad x\to+\infty.$$

综上所述,反常积分 I 在 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时收敛;在 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时 I 发散.

定理 8.8(Abel 判别法) 积分

$$I=\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛的一个充分条件是:

(1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的;

(2) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是有界的单调函数.

对于积分 $\int_{-\infty}^{b}f(x)g(x)\mathrm{d}x$,其收敛的充分条件也类似.

证明 首先注意到,$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 内的任一闭区间上均可积,从而由题设知,对任意 $a<X<x'<x''<+\infty$,可以建立第二中值公式:存在 $\xi:x'<\xi<x''$,使得

$$\int_{x'}^{x''}f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(x')\int_{x'}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(x'')\int_{\xi}^{x''}f(x)\mathrm{d}x. \quad ③$$

其次,不妨假定 $|g(x)|\leqslant M,x\in[a,\infty)$.现在对任给的 $\varepsilon>0$,由(1)知存在 $X:X>a$,使得当 x',x'' 满足 $X<x'<x''<\infty$ 时,有

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

由此,对 $x'<\xi<x''$ 当然也有

$$\left|\int_{x'}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad\left|\int_{\xi}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

因此,在式③中应用上述不等式,可得

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(x')| \left|\int_{x'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(x'')| \left|\int_{\xi}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛准则，I 收敛.

例 7 积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\arctan x\mathrm{d}x\quad(p>0)$是收敛的.

证明 应用 Abel 判别法，视$f(x)=\frac{\sin x}{x^p}(p>0)$，它在$[1,\infty)$上的积分收敛(已证)；视$g(x)=\arctan x$，它是单调有界函数，因此 I 收敛.

例 8 f、$g\in C([a,\infty))$，又 $g(x)$严格单调$(x\geqslant A>a)$且$g(x)\to l\neq 0$. 若$\int_a^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 只需注意积分等式$(B>A)$

$$\int_B^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_B^{+\infty}g(x)f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\mathrm{d}x.$$

思考练习 解答下列问题：

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\sin x\,\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x\cdot\sin x}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}x^2\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$；(提示：换元 $\mathrm{e}^x=t$)

(4) $\int_0^{+\infty}\sin^3(x^2+2x)\mathrm{d}x$. (提示：换元 $x^2+2x=t$)

2. 试证明下列命题：

(1) 若$\int_1^{+\infty}x^p f(x)\mathrm{d}x(p>0)$收敛，则$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) $\int_1^{+\infty}\sin(x^3)\mathrm{d}x$ 收敛. $\left(提示：\sin x^3=x^2\,\frac{\sin x^3}{x^2}\right)$

3. 若在 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 递减趋于 0,试证明 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 同敛散.

4. 试证明下列等式:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.

$\left(\text{提示:}\left|\int_x^A\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{x^2}\int_x^{\xi_A}\sin t\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2}{x^2},A>x\right)$

5. 设 $f\in C^{(1)}([1,\infty))$,且 $f(x)$ 递减趋于 $0(x\to+\infty)$,试证明 $\int_1^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛.

§3 无界函数的积分——瑕积分

3.1 瑕积分[①]的定义

为陈述简便起见,我们约定:在点 $x=x_0$,若对任意的 $\delta>0$,$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 或 $(x_0,x_0+\delta)$ 有定义且是无界的,则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的**瑕点**,也说 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有无穷间断.

定义 8.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义,且对任意的 $\varepsilon>0$,$f\in R([a,b-\varepsilon])$,点 $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点. 若存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x, \qquad ①$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(关于点 b)的**瑕积分收敛**或**存在**,其极限值称为此瑕积分的值,并记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

此时也称 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可积的. 若式①极限不存在(包括等于

① 瑕积分是反常积分(广义积分)的一种.

无穷的情形),则也说$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散或不存在.

类似地,当$x=a$为$f(x)$的瑕点,且对任给的$\varepsilon>0$,$f\in R([a+\varepsilon,b])$时,若存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad ②$$

则称$f(x)$在$[a,b]$上(关于点a)的瑕积分收敛或存在,其极限值称为该瑕积分的值,并记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若式②中极限不存在(包括等于无穷的情形),则也说$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散或不存在.

例1 瑕积分$I=\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ $(p>0)$收敛当且仅当$p<1$.

证明 当$p>0$时,$x=a$是被积函数的唯一瑕点,此时当$p\neq 1$时我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(b-a)^{p-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{p-1}}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-p)(b-a)^{p-1}}, & p<1;\\ -\infty, & p>1.\end{cases}$$

当$p=1$时,我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0+}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]=-\infty.$$

这说明,该瑕积分只在$p<1$时收敛.

作为一个特例,可知瑕积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ $(p>0)$在且只在$p<1$时收敛.

此外,同理可证瑕积分$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$,$p>0$在且只在$p<1$时收敛.

例 2 瑕积分 $I=\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 是收敛的.

证明 易知 $x=0$ 是 $\ln x$ 的瑕点. 因为有

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \ln x\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0+}(x\ln x-x)\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0+}(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon)=-1,$$

所以该瑕积分收敛.

对于具有两个瑕点以上的瑕积分,我们给出下述定义:

定义 8.5 设 $a<c<b$,且积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\ \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{③}$$

均为瑕积分,其中或 $x=a,b$ 为$f(x)$的瑕点;或 $x=c$ 为$f(x)$的瑕点. 若式③中两个积分均收敛,则称$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛或存在,且记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

若式③中的积分至少有一个是发散的,则称$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分发散.

注 在上述定义中,当 $x=c$ 为瑕点时,为判定$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性,我们需要计算的是两个极限式的和:

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\eta\to 0+}\int_{c+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

而不是

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

例 3 考察$\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 易知 $x=-1$ 是被积函数的瑕点,但 $x=1$ 则不是,因为我们有

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=1.$$

即被积函数在点 $x=1$ 附近是有界的. 从而

$$\int_{-1}^{1}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\delta\to0+}\int_{-1+\delta}^{1}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\lim_{\delta\to0+}\left(-\frac{1}{2}\arccos^2 x\right)\Big|_{-1+\delta}^{1}=\frac{1}{2}\lim_{\delta\to0+}\arccos^2(-1+\delta)=\frac{\pi^2}{2}.$$

思考练习

设对任意的 n, $f\in R\left(\left[a,b-\frac{1}{n}\right]\right)$, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的原函数, $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点, 若存在极限 $\lim\limits_{x\to b-}F(x)=F(b-)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分存在, 且有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b-)-F(a).$$

3.2 积分的基本性质

无论瑕点在 $x=a$ 或 $x=b$ 处, 瑕积分的敛散性都是由变(上、下)限积分的极限来界定的, 而基础的计算是内部区间上的定积分. 因此, 关于定积分的许多运算性质均可自然地扩展到瑕积分中来, 其证明也雷同. 这些性质为瑕积分值的计算简化了手续, 现列如下:(证明略)

1. (线性性质) 若瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx,\quad \int_a^b g(x)dx$$

收敛, 则对任意的实数 α 以及 β, $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分收敛, 且有

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2. (类 Newton-Leibniz 公式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分收敛.

(1) 若 $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的原函数, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-) - F(a).$$

(2) 若 $x=a$ 是$f(x)$的瑕点,且 $F(x)$是$f(x)$在$(a,b]$上的原函数,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a+).$$

3. (换元公式) 设$f(x)$在$[a,b)$上连续,$x=b$ 是瑕点,$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta)$上连续可微,且有

$$a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)<\lim_{t\to\beta-}\varphi(t)=\varphi(\beta-)=b,$$

则等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

在左、右端积分之一收敛时成立;又当其中一个积分发散时,另一个积分也发散.

在 $x=a$ 是瑕点时,也有相应的性质.

4. (分部积分公式) 设$u(x)$,$v(x)$在$[a,b)$上连续可微,$x=b$是瑕点,且存在极限

$$\lim_{x\to b-} u(x)v(x),$$

则等式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

$$\left(u(x)v(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b-} u(x)v(x) - u(a)v(a)\right)$$

在左、右端积分之一收敛时成立. 当其中一个积分发散时,另一个积分也发散.

在 $x=a$ 为瑕点时,也有类似结论.

例1 计算 $I=\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 $x=0$ 是瑕点,我们有

$$I=\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[6]{x}}+2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}+\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\frac{31}{5}.$$

例 2 $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 只需注意$\left(\text{换元 } t=\frac{1}{x}\right)$

$$-I=\int_0^1 \cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{+\infty}\cos t^2\,\mathrm{d}t.$$

例 3 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4.$

解 用分部积分法,视$u(x)=\ln x,\mathrm{d}v(x)=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$,则 $\mathrm{d}u(x)=\frac{\mathrm{d}x}{x},v(x)=2\sqrt{x}$. 由此知

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\ln x\Big|_{0+}^{1}-2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=-4.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 试证明$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\pi\left(\text{提示:作变量替换 } x=a\cos^2 t+b\sin^2 t,0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

2. 若瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛,试问积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛吗?$\left(\text{提示:考察}[0,1]\text{上的}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

3. 设瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,$x=b$ 是$f(x)$的瑕点,则存在$\mu\in(-\infty,\infty)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mu(b-a).$$

4. 试证明$\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx=\frac{3}{8}\pi a^2$$\left(\text{提示:设}\sqrt{\frac{x}{a-x}}=t\right)$

§4 瑕积分收敛与发散的判别法

在用极限结构界定的量值或概念中,我们已多次认识到极限存在性研究的重要意义,对瑕积分这一课题也同样如此. 本节的目的,就是要在尚未求出瑕积分值的情况下从被积函数本身来判断它的敛散性.

不难看出,瑕积分收敛与否,取决于被积函数在瑕点附近的性态. 为简便起见,我们分别两种情况加以讨论:一是函数值不变号,不妨假定函数是非负的(否则以$-f$代替f),此时最典型的判别手段是比较判别法;二是被积函数值变号的情况,此时自然地会引出绝对收敛的概念,而一般的判别法,除了 Cauchy 准则(这是极限存在性理论普遍原理的具体体现)外,还有将被积函数视为两部分分别考察的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法. 由此可见,论述瑕积分收敛判别法的体系与无穷区间上的积分完全相同.

4.1 非负函数积分敛散性的比较判别法

这里,主要介绍瑕积分两种形式的比较判别法. 为简便起见,在下述定理中,总是假定被积函数在整个区间上是非负的,而且在说到$x=a$(或$x=b$)是瑕点时,认定对任意的$\varepsilon>0$,有$f\in R([a+\varepsilon,b])$,($f\in R([a,b-\varepsilon])$).

定理 8.9(积分收敛与积分有界的关系) 设$x=b$是$f(x)$的瑕点,则$f(x)$在$[a,b]$上瑕积分收敛的充分必要条件是:存在正数M,使得对一切ε:$0<\varepsilon<b-a$,有

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\leqslant M. \qquad ①$$

在$x=a$为$f(x)$的瑕点时,上式改为

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M,\ 0<\varepsilon<b-a.$$

证明 充分性. 因为$f(x)$是非负的,所以$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 作为 ε 的函数随 ε 的减小而递增. 如果式①成立,那么它又是有上界的. 从而存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

即$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分是收敛的.

必要性. 假定$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分是收敛的,此时如果式①不成立,那么积分$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 将随 ε 减小而成为递增无上界的函数. 因此有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=+\infty.$$

这与瑕积分收敛性假设矛盾,故式①必须成立.

同理可证 $x=a$ 为$f(x)$的瑕点的情形.

(一) 函数间的比较判别法

有了上述结论,对于非负函数的瑕积分,只需考察变动上(下)限的积分的有界性即可. 为此,我们首先想到的是,用已知收敛(或发散)的瑕积分来与未知的瑕积分进行比较,从而归结为被积函数大小的比较.

定理 8.10(函数间的比较) 设有定义在$[a,b)$上的两个非负函数$f(x)$, $g(x)$, $x=b$ 是它们的公共瑕点,而且 $f(x)\leqslant g(x)$, $x\in[a,b)$.

(1) 若$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛,则$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分也收敛,且有

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分发散,则$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分也发散.

对于 $x=a$ 是瑕点的情形,若有

$$f(x)\leqslant g(x),\ x\in(a,b],$$

其结论也类似.

证明 由于$f(x)\leqslant g(x)$,$x\in[a,b)$,故有

$$0\leqslant\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{b-\varepsilon}g(x)\mathrm{d}x,\ 0<\varepsilon<b-a.$$

(1) 根据题设,$g(x)$是可积的,存在正数M,使上述右端不超过M.因此也就有

$$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M,\ 0<\varepsilon<b-a.$$

即$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛.

(2) 据题设,$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$是无上界的.从而可知$\int_a^{b-\varepsilon}g(x)\mathrm{d}x$也是无上界的,即$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分发散.

例 1 瑕积分$\int_0^1\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$是收敛的.

证明 易知$x=0$是被积函数的瑕点,且有

$$0\leqslant\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}},\ 0<x\leqslant 1.$$

注意到$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$在$[0,1]$上的瑕积分存在,可知原瑕积分收敛.

例 2 瑕积分$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}}$是收敛的.

证明 将被积函数写为($x=1$是被积函数的瑕点)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

注意到$\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$在$[0,1]$上是有界的,记其上确界为M,我们有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\leqslant\frac{M}{\sqrt{1-x}}\quad (x\in[0,1)).$$

因为$g(x)=\dfrac{M}{\sqrt{1-x}}$在$[0,1]$上的瑕积分收敛,所以瑕积分 I 收敛.

例 3 判别积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$, $p>0$ 的敛散性.

解 当 $p\leqslant 1$ 时,被积函数是有界函数,且在$[0,1)$上是连续的,因此在通常意义下是可积的.

对于 $p>1$,$x=0$ 是被积函数的瑕点.此时注意到正数 $\delta>0$ 充分小时,在$(0,\delta]$上有

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x^{p-1}}\leqslant\frac{\sin x}{x^p}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x^{p-1}}\leqslant\frac{1}{x^{p-1}}.$$

从而根据比较判别法可知,瑕积分 I 在 $p-1<1$ 即 $p<2$ 时收敛,$p\geqslant 2$ 时发散.

上述例解的关键点在于,如果在瑕点(不妨设为 $x=a$)附近,有估计式

$$f(x)\leqslant\frac{M}{(x-a)^\alpha},\ f(x)\geqslant\frac{M}{(x-a)^\alpha},$$

则瑕积分在前一种情形当 $\alpha<1$ 时收敛,在后一种情形当 $\alpha\geqslant 1$ 时发散.这就引导出比较判别法的极限形式,它在许多实际应用中更加方便.

(二) 极限形式的比较判别法

定理 8.11 设 $x=b$ 是$f(x)$,$g(x)$的公共瑕点.又$g(x)\neq 0$,$x\in[a,b)$,且存在极限

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=l. \qquad ②$$

则若 $l>0$,那么$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分或同时收敛,或同时发散.

在 $x=a$ 是瑕点的情形,若存在极限$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$,则结论也

一样.

证明 由式②可知,存在 $c:a<c<b$,使得

$$\frac{1}{2}l<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}l,\ c\leqslant x<b,$$

或写成

$$\frac{l}{2}g(x)<f(x)<\frac{3l}{2}g(x),c\leqslant x<b.$$

若$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛,则根据右端不等式以及定理8.10可知,$f(x)$在$[c,b]$上的瑕积分也收敛,从而可推知$f(x)$在$[a,b]$上可积.

若$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分发散,则根据左端不等式以及定理8.10可知,$f(x)$在$[c,b]$上的瑕积分也发散,从而可推知$f(x)$在$[a,b]$上不可积.

注意,我们还不难导出下列结论:

(1) 若 $l=0$,且 $g(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上也可积.

(2) 若$\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,且$g(x)$在$[a,b]$上的瑕积分发散,则$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分也发散.

应用上述定理时,关键是要选取$g(x)$,而其中常用者为

$$\frac{1}{(x-a)^{\lambda}},\ \frac{1}{(b-x)^{\lambda}}.$$

也就是说,对 $x=a$ 或 $x=b$ 是瑕点时,应作极限运算($\lambda>0$)

$$\lim_{x\to a+}(x-a)^{\lambda}f(x),\ \lim_{x\to b-}(b-x)^{\lambda}f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时,若上式极限存在,则$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛;当 $\lambda\geqslant1$ 时,若上式极限存在且不等于零,则$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分发散.

例 4 $\displaystyle\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\mathrm{d}x$ 是发散的.

证明 只需注意 $x=1$ 是被积函数的瑕点,以及极限等式

$$\lim_{x\to 1+}(x-1)\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=1.$$

例 5 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

证明 (1) 根据极限式($x=0$ 是被积函数的瑕点)

$$\lim_{x\to 0+}x^{\lambda}\ln\sin x=\lim_{x\to 0+}\left(x^{\lambda}\ln x+x^{\lambda}\ln\frac{\sin x}{x}\right)=0\quad(\lambda>0),$$

取 $\lambda=\frac{1}{2}$,即知 I 收敛.

(2) 作变量替换 $x=\pi-\theta$ 和 $x=\frac{\pi}{2}-\theta$ 可得

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin\theta\mathrm{d}\theta,\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\mathrm{d}\theta.$$

因此,我们有 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 再作替换 $\theta=2\varphi$,并注意到 $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$,可知

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I.\end{aligned}$$

移项后算出 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

在极限形式的比较判别法中,一种特定情形就是 $l=1$,也即有对等关系:

$$f(x)\sim g(x)\quad(x\to a+\text{或 }x\to b-).$$

此时,牢记函数在极限过程中与某种幂函数的等价性是很方便的.

例 6 瑕积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+3\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 是收敛的.

证明 $x=0$ 是被积函数的瑕点,我们有

$$\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\sim\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\quad(x\to 0+).$$

由此知 I 收敛.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^3}$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{x^n}\mathrm{d}x(m<n)$;

(3) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$;　　(4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. 判别下列积分的敛散性:

(1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$;(提示:$\ln x=\ln[1-(1-x)]$)

(2) $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}\mathrm{d}x$. $\left(\text{提示:换元 } x^2=\frac{1}{t}\text{,再以}\frac{1}{2}\text{为分点分区间}\right)$

4.2 瑕积分的绝对收敛

当$f(x)$在定义区间上的值要变号时,我们有一种简单的方法让它成为不变号的,那就是取其绝对值,即$|f(x)|$. 当然,这样做后,必须研究$f(x)$与$|f(x)|$的瑕积分收敛性之间的关系才有意义. 为此,我们引入绝对收敛的概念.(下面总是假定$f(x)$在去瑕点后的内闭区间上可积)

定义 8.6 若瑕积分

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛,则称瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

为判别瑕积分是否绝对收敛,由于此时被积函数已呈非负性,故可采用上节所介绍的比较判别法.

例 1 瑕积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ $(1<p<2)$是绝对收敛的.

证明 记 $p=1+\alpha$,$0<\alpha<1$,注意到($x=0$ 是瑕点)

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|=\left|\frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}\right|=\frac{1}{x^\alpha}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^\alpha},$$

立即可知瑕积分$\int_0^1\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$, $1<p<2$ 收敛,即 I 是绝对收敛的.

注 并不是每个收敛的瑕积分都是绝对收敛的(反例将在后文中给出).为此,我们称非绝对收敛的收敛瑕积分为条件收敛.下述结果表明,绝对收敛的瑕积分自身必收敛.

定理 8.12 若$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分绝对收敛,则$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛.

证明 注意到不等式 $0\leqslant|f(x)|-f(x)\leqslant2|f(x)|$,即知积分

$$\int_a^b[|f(x)|-f(x)]\mathrm{d}x$$

收敛.再将$f(x)$写成

$$f(x)=|f(x)|-[|f(x)|-f(x)],$$

就可得到$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛的结论.

例 2 设 $f\in C([0,1])$且 $f(0)=0$.若$f(x)$在 $x=0$ 处(右)导数存在,则积分

$$I=\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

存在.

证明 由$f(x)$在$[0,1]$上的连续性可知,对任意的 $\delta>0$,存在积分$\int_\delta^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.因此,只需指出存在 $\delta>0$,使得积分$\int_0^\delta f(x)x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$收敛.

此外,因为 $f'(0)$存在,不妨记为 l,注意到

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=l,$$

所以存在 M,使得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant M,\ x\in[0,\delta].$$

由此可知

$$|f(x)x^{-\frac{3}{2}}|=\left|\frac{f(x)}{x}x^{-\frac{1}{2}}\right|\leqslant Mx^{-\frac{1}{2}},\ x\in[0,\delta].$$

由于 $Mx^{-\frac{1}{2}}$ 在 $[0,\delta]$ 的瑕积分存在,故知积分 $\int_0^\delta f(x)x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$ 也存在.

思考练习 试证明下列命题:

1. $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x\,(0<p<1)$ 是绝对收敛的.

2. 设 $f\in C((a,b))$, $x=a$ 及 b 是 $f(x)$ 的瑕点. 若 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3. 设 $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, $g\in R([a,b])$,则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

4.3 一般函数积分敛散性的判别法

这里所谓的一般函数,是对被积函数值在定义区间上可以变号的情形. 此时,按照瑕积分收敛性的极限定义,自然首先是考虑关于极限存在性 Cauchy 准则的移植. 然后,在此基础上又可建立其他一些有效的判别准则,它们的共同特征仍是自身判别,即不必借助外部的任何信息(如比较判别法中的 $g(x)$).

(一) 瑕积分收敛的充分必要条件

定理 8.13 (Cauchy 收敛准则) (1) 设 $x=b$ 是 $f(x)$ 的瑕点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分收敛的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 δ: $0<\delta<b-a$,使得当 x',x'' 满足 $b-\delta<x'<x''<b$ 时,有

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

(2) $x=a$ 是$f(x)$的瑕点时,$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分收敛的充分必要条件是:对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta:0<\delta<b-a$,使得当 x'、x''满足 $a<x''<x'<a+\delta$ 时,有

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon. \tag{①}$$

证明 以(1)为例.

必要性. 若记

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛等价于存在极限

$$\lim_{x\to b-} F(x).$$

而后者又等价于对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta:0<\delta<b-a$,使得当 x'、x''满足 $b-\delta<x'<x''<b$ 时有

$$|F(x'')-F(x')|<\varepsilon. \text{ 即}\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

注 式①也可写为$\lim\limits_{\substack{x'\to 0+\\ x''\to 0+}}\int_{x''}^{x'} f(x)\mathrm{d}x=0$.

(二) 函数乘积的瑕积分收敛判别法

Cauchy 准则判别瑕积分的收敛性,在具体应用上并不总是方便的. 因此,类似于无穷区间上的积分,我们也有相应的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法. 它们也是针对被积函数是不同数量结构的两类函数乘积而发的. 从简化上考虑,在下面的陈述中加强了条件.

定理 8.14(Dirichlet) 设$f(x)$,$g(x)$定义在$[a,b)$上,$x=b$ 是$f(x)$的瑕点. 若有

(1) $f\in C([a,b))$,且在$[a,b)$上的原函数是有界的;

(2) $g(x)$在$[a,b)$上单调,且在$g(x)\to 0$ $(x\to b-)$,则积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 8.15(Abel) 设$f(x)$,$g(x)$定义在$[a,b)$上. 若有

(1) $f\in C([a,b))$，且积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

(2) $g(x)$在$[a,b)$上单调有界，则积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

对于$x=a$是瑕点的情形，也有类似的条件和结论.

证明 (以 Dirichlet 判别法为例)作变量替换$x=b-\frac{1}{t}$或$t=\frac{1}{b-x}$，则得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{f\left(b-\frac{1}{t}\right)}{t^2}g\left(b-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t. \qquad ②$$

记$F(x)=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u$是$f(x)$的原函数，易知$\frac{f\left(b-\frac{1}{t}\right)}{t^2}$的原函数是$F\left(b-\frac{1}{t}\right)$. 由$F(x)$在$[a,b)$上有界，可知$F\left(b-\frac{1}{t}\right)$在$\left[\frac{1}{b-a},\infty\right)$上有界. 此外，由$g(x)$在$[a,b)$上单调可知$g\left(b-\frac{1}{t}\right)$在$\left[\frac{1}{b-a},\infty\right)$上单调，且有

$$\lim_{t\to+\infty}g\left(b-\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to b-}g(x)=0.$$

于是，引用无穷区间上积分的 Dirichlet 判别法，可知式②右端分收敛，即得所证.

例 考察瑕积分$I=\int_0^1\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$的绝对收敛和条件收敛性.

解 记被积函数($x=1$是瑕点)为

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\sin\left(\frac{1}{1-x}\right),\quad g(x)=1-x$$

的乘积，易知$f(x)$在$[0,1)$上连续，且其原函数$-\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$是

有界的;$g(x)$在$[0,1]$上单调,且$g(x)\to 0(x\to 1-)$. 从而根据 Dirichlet 判别法,知 I 是收敛的.

此外,由于不等式

$$\left|\frac{1}{1-x}\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right|\geqslant\frac{1}{1-x}\sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

并注意到瑕积分$\int_0^1\sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$是发散的,故 I 不是绝对收敛的.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设$f(x)$在$(0,1]$上是单调函数,$x=0$ 是瑕点. 若瑕积分 $\int_0^1 x^a f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则有

$$\lim_{x\to 0+}x^{a+1}f(x)=0.$$

$\left(\text{提示:考察}\int_{\frac{x'}{2}}^{x'}x^a f(x)\mathrm{d}x,x'>0\right)$

2. 设 $f\in C([1,2])$, $x=2$ 是 $f(x)$ 的瑕点. 若积分 $\int_1^2\arctan x\cdot f(x)\mathrm{d}x$存在,试问$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 存在吗?

4.4 带瑕点无穷区间上积分敛散性的判别法

前面分别讨论了反常积分的两种情形:无穷区间上的积分和瑕积分. 现在我们来考察这两种反常积分的混合情形,即既是无穷区间上的积分而又在局部出现瑕点. 此时,必须在两种反常积分均收敛时才能判定其收敛.

例如,$f(x)$在$[a,\infty)$上定义. 若 $x=a$ 是$f(x)$的瑕点,则反常积分

$$I=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

仅在积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\ \int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

$(c>a)$均收敛时,I才是收敛的.上述两个积分之一发散,I发散.其他情况可类推.

例1 积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$是发散的.

证明 取 $c=1$,则由$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$仅在 $p<1$ 时收敛,$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$仅在 $p>1$时收敛,可知反常积分 I 发散.

例2 考察广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}\mathrm{d}x$ $(\beta\geqslant0)$的收敛性.

解 注意到 $\alpha<0$ 时 $x=0$ 可能是瑕点,因此分积分为两部分:

$$I=\left\{\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right\}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

对于 I_1,记被积函数为

$$\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}=\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}\cdot\frac{\sin x}{x},$$

可知当 $\alpha>-2$ 时,I_1 收敛.

对于 I_2,记被积函数为

$$\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}=\sin x\ \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}.$$

因为$\int_1^A\sin x\mathrm{d}x$ 关于A 有界,而$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$在$\beta>\alpha$ 时,随 $x\to+\infty$递减趋于 0,所以根据 Dirichlet 判别法,可知 I_2 在 $\beta>\alpha$ 时收敛.

综上所述,在 $\beta>\alpha>-2$ 时 I 收敛.

例3 考察 Euler 积分 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$(gamma 函数,最重要的超越函数之一,详细讨论见本教材第三册).

解 首先,考察无穷区间$[1,+\infty)$.因为不论 α 为何值,都有

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x}=0,$$

 所以积分

$$I_1(\alpha)=\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\quad \alpha\in(1,\infty)$$

收敛. 其次,当 $\alpha-1<0$ 时,$x=0$ 为瑕点,此时,有

$$\lim_{x\to 0+}x^{1-\alpha}\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}=1$$

这说明积分

$$I_2(\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (\alpha-1<0)\text{与}\int_0^1\frac{1}{x^{1-\alpha}}\mathrm{d}x$$

同敛散. 但后者在 $1-\alpha<1$ 时收敛,而在 $1-\alpha\geqslant 1$ 时发散. 由此知 $I_2(\alpha)$在 $\alpha>0$ 时收敛,在 $\alpha\leqslant 0$ 时发散.

总结以上讨论,可知 $\Gamma(\alpha)$收敛当且仅当 $\alpha>0$.

例 4 设 $f\in C([0,\infty))$,且

$$\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\ (\text{任意的 } c>0)$$

收敛,则有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a},\quad b>0,a>0.$$

证明 由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,下述反常积分是收敛的:

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x,\quad \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{b\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

因此,由中值定理可得

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi)\ln\frac{b}{a},\quad a\varepsilon\leqslant\xi\leqslant b\varepsilon.$$

注意到 $x=0$ 是$\dfrac{f(x)}{x}$的瑕点,我们有

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

例 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\mathrm{d}x=0,a>0,b>0.$

证明 考察$f(x)=\sin x$,显然$f(0)=0$,且$\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ $(c>$

0)收敛. 即得所证.

例 6 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2t}}{x}dx}{\ln t}=-\dfrac{1}{2}.$

证明 对分子作变量替换 $y=x\sqrt{t}$,则得

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2t}}{x}dx=\int_{\sqrt{t}}^{+\infty}\frac{e^{-y^2}}{y}dy$$

$$=\int_{\sqrt{t}}^{1}\frac{dy}{y}+\int_{\sqrt{t}}^{1}[-y+o(y)]dy+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y^2}}{y}dy.$$

因为上式右端后两个积分皆有界,而第一个积分值为 $-\ln\sqrt{t}$,所以有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^2t}}{x}dx}{\ln t}=\lim_{t\to 0+}\frac{-\ln\sqrt{t}}{\ln t}=-\frac{1}{2}.$$

思考练习 试证明下列命题:

1. 设对任意的正值 a、b:$a<b$,$\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛,且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=M,\quad \lim_{x\to 0+}f(x)=L,$$

则对任意的 $\alpha,\beta>0$,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=(L-M)\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

2. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\frac{\beta}{\alpha},(\alpha,\beta>0).$

3. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\alpha x)-\arctan(\beta x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta},(\alpha,\beta>0).$

注　　记

(一) 关于比较判别法

非负函数在无穷区间上的反常积分不一定都能用比较判别法,例如

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4\cos^2 x},\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\cos^2 x},$$

前者发散,后者收敛. 但我们可用无穷级数(见第九章)来和它比较. 实际上,我们有

$$\int_0^{n\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4\cos^2 x}=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4\cos^2 x}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\pi^2}{\sqrt{1+k^4\pi^4}}$$

$$\int_0^{n\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\cos^2 x}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{\sqrt{1+(k-1)^4\pi^4}}.$$

(二) 关于函数的极限趋势比较判别法

用函数的极限趋势比较判别法是针对非负函数而言的,变号函数不一定成立. 例如在 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时,积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}(\text{收敛}),\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}\mathrm{d}x\ (\text{发散})$$

但

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sin x}{x^\alpha}}{\dfrac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}}=1.$$

(三) 对数根值型判别法简介

命题 8.1 设 $f(x)>0\ (a\leqslant x<\infty)$,$f\in R([a,b])$(任意的 $b>a$). 若有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p,$$

则 $$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{收敛}, & -\infty\leqslant p<-1,\\ \text{发散}, & -1<p\leqslant+\infty.\end{cases}$$

证明 (1) 若 $p<-1$,则对 $p<p_0<-1$,存在 $X>a$,且 $X>1$,使得当 $x>X$ 时有

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x}<p_0,\ \ln f(x)<\ln x^{p_0},$$

即 $f(x)<x^{p_0}\ (p_0<-1)$,结论成立.

(2) 若 $p>-1$,则对 $-1<p_1<+\infty$,存在 $X>a$,使得当 $x\geqslant X$ 时有

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x}>p_1,\ f(x)>x^{p_1}.$$

即得所证.

命题 8.2 设 $f(x)>0\ (a\leqslant x<\infty)$,且对任意的 $b>a$,$f\in R([a,b])$. 若存在 $\alpha>0$,使得 $f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{\frac{1}{x^a}}=l,$$

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\begin{cases}收敛, & l<1,\\ 发散, & l>1.\end{cases}$

(四) 反常积分中值公式简介

命题8.3 设$f(x),g(x)$都是$[a,\infty)$上的正值可积函数,且$f(x)$是一致连续函数,则存在 $\xi\in(a,\infty)$,使得

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 易知对任意的 $n>a$,存在 $\xi_n\in(a,n)$,使得

$$\int_a^{n} f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi_n)\int_a^{n} g(x)\mathrm{d}x.$$

(1) 如果存在$\{\xi_{n_k}\}:\xi_{n_k}\to+\infty(k\to+\infty)$,则由$f(x)$的一致连续性,必有

$$\lim_{k\to\infty} f(\xi_{n_k})=0.$$

由此知

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_a^{n_k} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty} f(\xi_{n_k})\int_a^{n_k} g(x)\mathrm{d}x=0.$$

这是不可能的.

(2) $\{\xi_n\}$是有界列,故存在收敛子列 $\xi_{n_k}\to\xi\ (k\to\infty)$. 随之有 $f(\xi_{n_k})\to f(\xi)\ (k\to\infty)$. 因此得到

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\lim_{k\to\infty}\int_a^{n_k} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{k\to\infty} f(\xi_{n_k})\int_a^{n_k} g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

命题8.4 设$f(x)$是$[a,b]$上非负递增函数,又 $x=a$ 是$g(x)$的瑕点,且$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 易知$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的. 现在考察$\left[a+\frac{1}{n},b\right](n\gg1)$上的积分,我们有

$$\int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_{\xi_n}^b g(x)\mathrm{d}x\quad\left(a+\frac{1}{n}<\xi_n<b\right).$$

因为$\{\xi_n\}$是有界列,所以存在子列:$\xi_{n_k}\to\xi\ (k\to\infty)$. 从而可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{a+1/n_k}^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{k\to\infty}f(b)\int_{\xi_{n_k}}^b g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(五) 瑕积分与 Riemann 和

瑕积分不是 Riemann 意义下的定积分. 因此,一般地讲,公式$\left(x=a\right.$是$f(x)$的瑕点,$\left.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

不一定成立. 但若再假定$f(x)$在$(a,b]$上递增,则上式成立.

为证此,只需注意

$$\int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

以及$\frac{b-a}{n}\to 0\ (n\to\infty)$即可. (注意,对$(0,1)$上的单调函数$f(x)$,即使存在$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$,积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$也可不存在.)

例 设$a>-1$, $S_n(a)=1^a+2^a+\cdots+n^a\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{S_n(a+1)}{S_n(a)}=\frac{a+1}{a+2}.$$

证明 注意x^a, x^{a+1}是单调函数,又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{\sum\limits_{1}^{n}k^a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a+1}\cdot\frac{1}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a}\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\int_0^1 x^{a+1}\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^a\mathrm{d}x}=\frac{a+1}{a+2}.$$

第九章 常数项级数

常数项(无穷)级数是指

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

这样一种数学表达形式,其中的 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 都是常数,它从 a_1 开始,加上第 2 项 a_2,再加上 a_3,…,依次无止境地加起来.

那么,这样没完没了地作加法会有什么结果呢? 是什么意思呢? 这实质上又是一个如何认识和处理无限运算过程的问题. 早在古代,这种数学现象就已出现,例如古希腊数学家 Archimedes在求抛物弓形的面积,以及我国魏晋时代的刘徽在求单位圆面积时都应该要作无限次加法运算(参阅本章注记),只是由于受当时科学思想的限制,不能作出正确的操作.

伴随着微积分学的产生与发展,无穷级数的运算在数学中频繁地产生. 例如在 Newton 的流数术中,对于稍微复杂一些的代数曲线和超越函数,只有在把它们展成无穷级数并进行逐项微分和积分时才能处理. 这种把一个整量展开成无穷多项分量之和的思想,为研究函数性态提供了强有力的手段,推动了级数理论的发展,开辟出新的数学研究领域. 我们将在下两章介绍这些内容.

注 在级数理论的展述中,大家将会看到,它与无穷区间上的反常积分不仅在体系上有类似之处,而且众多命题的陈述方式也大同小异. 这是因为在本质上,两者皆为“求和”运算,只不过积分是对(特定结构的)连续变量,级数是对离散量而发的. 因此,从对比中来理解它们也是有益的.

§1 级数收敛的概念和必要条件

设有数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,则称式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad ①$$

为**无穷常数项级数**,也称**数值级数**,而称 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为该级数的**项**,称 a_n 为**通项**,a_1 为第一项等等.

级数①中前 n 项的和记为 S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, (S_{n+1} = S_n + a_{n+1})$$

称为级数①的**前 n 项部分和**. 当 $n=1,2,\cdots$时,前 n 项部分和又形成一个数列

$$\{S_n\}: S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots.$$

前面已经提到,级数①只是一个表示形式,我们必须赋予它确切的数学含义.

定义 9.1 若级数①的部分和数列$\{S_n\}$是收敛的,即存在极限

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

则称级数①是收敛的,称 S 为该级数的**和**,也称该级数收敛于 S,且写为 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

若 $n\to\infty$时,S_n 的极限不存在(包括 $n\to\infty$时,$S_n\to\infty$),则称级数①发散. 级数没有了"和".

从定义立即可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 的敛散性是等价的,这里 n_0 是任意取定的正整数.

例 1 设 n_0 是一个正整数,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+n_0)}=\frac{1}{1+n_0}+\frac{1}{2(2+n_0)}+\cdots+\frac{1}{n(n+n_0)}+\cdots$$

是收敛的,且其和为

$$\frac{1}{n_0}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n_0}\right).$$

解 首先用裂项法求出部分和,不妨认定 $n>n_0$,我们有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+n_0)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n_0}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n_0}\right)$$

$$=\frac{1}{n_0}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n_0}\right)$$

$$=\frac{1}{n_0}\left(\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}+\sum_{n_0+1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{n_0+1}^{n+n_0}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n_0}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}-\frac{1}{n_0}\sum_{n+1}^{n+n_0}\frac{1}{k}.$$

其次求出极限,显然有

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n_0}\sum_{n+1}^{n+n_0}\frac{1}{k}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

从而可得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{n_0}\sum\limits_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}$.

注 级数的收敛与否是用数列(部分和序列)的极限来定义的.因此,根据极限的处理方法(极限的存在性与极限值是什么分别讨论),对级数我们也分两个问题来研究,即级数是否收敛(S_n 当 $n\to\infty$时是否存在极限?)? 以及当级数收敛时其和是什么(S_n 的极限是什么?)? 求和是一个较困难的问题,上例之所以能够立即解出,是因为 S_n 可以用裂项法约化为一个简明的公式.级数的主要内容是在探讨前一个问题.实际上,在已知级数收敛时,其和的近似值已可估算出来,这对许多课题而言已足够了.

根据级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的定义,如果记 $R_n=\sum\limits_{n+1}^{\infty}a_k$,那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的意思也可说成是$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

当然,它在一般情况下并没有获得实质性的进展.然而知道下述关于级数收敛的必要条件则是不可或缺的.

定理 9.1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是：$\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

证明 记该级数的前 n 项部分和为 S_n，则按题设存在 S，使得 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$. 因为 $a_n=S_n-S_{n-1}(n>1)$，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ 是发散的.

证明 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{-2}\neq 0.$$

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$ $(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$是发散的.

证明 我们指出此级数的通项随 $n\to\infty$ 并不趋于 0. 反证，假定 $\sin(n\alpha)\to 0(n\to\infty)$，则 $\sin(n+1)\alpha\to 0(n\to\infty)$. 注意到 $\sin(n+1)\alpha=\sin(n\alpha)\cdot\cos\alpha+\cos(n\alpha)\sin\alpha$，即知 $\cos(n\alpha)\to 0$ $(n\to\infty)$. 但这是不可能的，因为 $\cos^2(n\alpha)+\sin^2(n\alpha)=1$.

注 $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$不是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分条件，例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+C+\varepsilon_n\right)$，虽然其通项趋于 0. 不过，在通项趋于 0 的情况下，S_n(在 $n\to\infty$时)是否有极限也就可由 S_{2n} 在 $n\to\infty$时的极限来决定了. 这是因为此时又由 $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ 可知，S_{2n+1} 与 S_{2n}有着相同的极限.

例 4 $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}+\cdots=\ln 3.$

证明 注意到$\frac{1}{3n+2}\to 0,\frac{2}{3n+3}\to 0$ $(n\to\infty)$. 从而考察部分和

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}$$

$$=\sum_{k=1}^{3n+3}\frac{1}{k}-3\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{3k}$$

$$=\ln(3n+3)+C+\varepsilon_n'-[\ln(n+1)+C+\varepsilon_n'']=\ln 3+\varepsilon_n,$$

$\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$. 即得所证.

思考练习 解答下列命题:

1. 试证明数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛.

2. 设$a_n\to a\ (n\to\infty)$,试证明$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2})$收敛,并求其和.

3. 试求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$;(提示:对分母有理化)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.(提示:分别对$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$与$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$有理化)

4. 记$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和为S_n. 若有$S_{3n}\to S, a_n\to 0\ (n\to\infty)$,试证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$.

5. 试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^2)$发散.

6. 设$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛. 若$a_n\to 0\ (n\to\infty)$,试证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

7. 试问级数$a_1-a_1+a_2-a_2+\cdots+a_n-a_n+\cdots$收敛吗? 试给出其收敛的充分必要条件.

8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sigma$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=A$, 试求和 $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.(答案:$2A-\sigma$)

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$. 若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$, 试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=S$.

10. 试证明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$.

11. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 记 $R_n=\sum_{n+1}^{\infty}a_k$, 试证明 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}}=\sqrt{R_1}$.

§2 收敛级数的运算性质

本节所介绍的关于收敛级数的运算所具有的性质,有助于判定级数的敛散性.

定理 9.2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且其和各为 S、σ,则

(1) 对常数 c, $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ 收敛且和为 $c\cdot S$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛且和为 $S+\sigma$.

证明 (1) 因为 $\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c\cdot a_k=\lim_{n\to\infty}c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k=c\cdot S.$$

(2) 因为 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$, 所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=S+\sigma.$$

推论 9.1 若 $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

证明 略(用反证法).

定理 9.3(收敛级数顺项可括性) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且其和为 S，$\{n_k\}$ 是正整数的一个子列. 若记 $a_{n_0}=0$，以及

$$A_k=\sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1} a_i,\ (k=1,2,\cdots),$$

则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛，且其和仍为 S.

证明 记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$，易知

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} A_i=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k-1} a_i=\lim_{k\to\infty} S_{n_k-1}=S.$$

注 上述定理之逆是不一定成立的，例如级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

是发散的，但级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

是收敛的. 下文将阐明，在正项级数情况下，其逆成立.

例 级数 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{7}-\cdots$ 是发散的.

证明 易知该级数的敛散性与新级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{5}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{7}+\cdots$$

相同. 如果新级数收敛，那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}-\frac{1}{2n+1}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

也收敛. 但是上述级数的前 n 项部分和为

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2k+1}\right)>\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k}-1}{2k}$$

$$>\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty\ (n\to\infty).$$

由此即知新级数发散,从而知原级数发散.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 c 是常数. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ 收敛,试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛吗?

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_{2n-1}+a_{2n}-a_{2n+1})$收敛吗?

3. 试论级数 $\sum\limits_{0}^{\infty} a^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot b^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $(|ab|<1)$的敛散性,其中$[x]$表示数 x 的整数部分.(提示:将级数分成两个等比级数的和)

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 若将此级数中相邻的带奇偶足标的两项作一次交换,试证明由此而组成的新级数收敛,且其和不变.

§3 正项级数收敛与发散的判别法

正项级数是指级数的每一项均为正数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n>0\ (n=1,2,\cdots). \qquad ①$$

从§1的讨论中我们知道,每一项 $a_n\geqslant 0$ 给部分和的估算带来许多便利. 因此,在展开敛散性的各种判别法的讨论时,从正项级数开始是很自然的.

3.1 正项级数收敛的特征

对于正项级数,由于每一项都是非负的,故其部分和数列成

为递增列,从而其收敛问题就化为它是否有上界的问题.

定理 9.4 正项级数①收敛的充分必要条件是:其部分和数列有上界.

证明 记①的前 n 项部分和为 S_n,若①收敛,即 $\{S_n\}$ 为收敛列,则 $\{S_n\}$ 为有界列. 必要性得证.

反之,假定 $\{S_n\}$ 有上界,那么 $\{S_n\}$ 就是有上界的递增列. 由此知 $\{S_n\}$ 收敛,充分性得证.

例 1 设 $\{a_n\}$ 是递增有界正数列,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

证明 不妨假定 $0<a_n\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$,因为有

$$0<S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}M\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=M\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\leqslant\frac{M}{a_1}.$$

所以该级数的部分和是有界的,即该级数收敛.

例 2 设 $a_1=1,a_2=2,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n=3,4,\cdots)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

证明 这是一个正项级数,且对每一个 $n>2$,有 $a_{n-2}<a_{n-1}<2a_{n-2}$. 从而又可得

$$a_n>a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1},\quad n\geqslant 2.$$

由此可知

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}}.$$

用 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ 写出,即为 $S_n-1<\frac{2}{3}S_n-\frac{2}{3}a_n^{-1}(n=1,2,\cdots)$. 也就是说,我们有

$$S_n<3-2a_n^{-1}<3\ (n=1,2,\cdots).$$

这说明部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界,级数收敛.

定理 9.5(Cauchy 凝聚判别法) 设$\{a_n\}$是递减正数列,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是:凝聚项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^n a_{2^n}\cdots$$

收敛.

证明 记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,$\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k a_{2^n}$,则

(1) 当$n\leqslant 2^k$时,我们有

$$\begin{aligned}S_n&\leqslant a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})\\&\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k}=\sigma_k.\end{aligned}$$

(2) 当$n>2^k$时,我们有

$$\begin{aligned}S_n&\geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})\\&\geqslant \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}\\&\geqslant \frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k})=\frac{\sigma_k}{2}.\end{aligned}$$

从而可得

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$收敛于$\sigma$,则由(1)知$S_n\leqslant\sigma$,这说明$S_n$有界,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛于$S$,则由(2)知$\sigma_k\leqslant 2S$.这说明$\sigma_k$有界,即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$收敛.

例 3 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$p\leqslant 1$时发散,$p>1$时收敛.

证明 (1) 当$p\leqslant 0$时,$\frac{1}{n^p}\geqslant 1$,该级数显然发散.

(2) 当$p>0$时,$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$是递减正数列,从而考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-p)}.$$

易知它是等比级数，且可得公比 2^{1-p}.

$2^{1-p}<1$ 即 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ 收敛；$2^{1-p}\geqslant 1$ 即 $p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ 发散. 根据 Cauchy 凝聚判别法，即得所证.

注 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 俗称 p—级数，是级数论中最重要的范例之一，许多级数敛散性的判定常以它作为比较的标准.

例 4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}收敛, & p>1,\\ 发散, & 0<p\leqslant 1.\end{cases}$

证明 易知通项是递减正数列. 根据凝聚判别法，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p} = \frac{1}{(\ln 2^n)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

即得所证.

例 5 论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\ln n}}(r>0)$ 的敛散性.

解 将 $r^{\ln n}$ 转写成 $n^{\ln r}$，易知当 $r>\mathrm{e}$ 时，$\ln r>1$；$r\leqslant \mathrm{e}$ 时，$\ln r\leqslant 1$. 从而根据 p-级数的敛散性判别原则，可知此级数在 $r>\mathrm{e}$ 时收敛，在 $r\leqslant \mathrm{e}$ 时发散.

例 6 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. 若 $p>\frac{1}{2}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ 收敛.

证明 应用 Cauchy 公式，我们有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由此易知 S_n 有上界，即得所证.

定理 9.6(Pringshcim) 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收

敛，则有$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证明 令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则由

$$S_{2n}-S_n=\sum_{n+1}^{2n}a_k\geqslant na_{2n},$$

可知 $(2n)a_{2n}\to 0(n\to\infty)$. 另一方面，由

$$(2n+1)a_{2n+1}=\frac{2n+1}{2n}(2n)a_{2n+1}\leqslant\frac{2n+1}{2n}(2n)a_{2n},$$

可知 $(2n+1)a_{2n+1}\to 0\ (n\to\infty)$. 即得所证.

注 上述结果$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)$可以看成是正项递减级数收敛的必要条件，对非正项级数是不正确的.

思考练习 解答下列问题：

1. $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 若存在有上界的真子列$\{S_{n_k}\}$，试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k$收敛.

2. 设$\{a_n\}$是正数列，$\{b_n\}$是$\{a_n\}$中的项经一个不漏且不重复地排列而成(项序可打乱地重新排列)的. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

3. 试论级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^{-\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)}$的敛散性.

4. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$R_n=\sum\limits_{n+1}^{\infty}a_k$，试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$收敛；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n}$发散.（提示：注意

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k}=\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{S_{k-1}}{S_k}\right);$$

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{a_k}{R_k}=\sum_{k=m}^{n}\frac{R_{k-1}-R_k}{R_k}>1-\frac{R_n}{R_{m-1}},$$

这说明对任意的正整数 m，$\sum\limits_{k=m}^{\infty}\frac{a_k}{R_k}\geqslant 1$ 而不能随 m 增大而趋于 0)

5. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试作正数列 $\{b_n\}:b_n\to+\infty(n\to\infty)$，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 仍收敛.（提示：参阅本章§1 思考练习 9）

6. 设有正项级数$(A)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$.

(1) 若(A)收敛，试证明 $a_n=o(\sqrt{R_{n-1}}-\sqrt{R_n})\ (n\to\infty)$.

(2) 若(A)发散，试证明$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=o(a_n)\ (n\to\infty)$.

7. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，试证明 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$收敛，其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

8. 试作一收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ln(\ln n)$发散.

3.2 通项比较判别法

前面给出的关于正项级数收敛的充分必要条件，从本质上讲，就是能否找到一个正数将其部分和控制住，不让它增长到无穷.注意到一个级数通常可由其通项来认定，因此这种控制自然也就应从通项着手.虽然由此可引发出各种各样的判别法则，但最基本的仍是比较判别法，它是许多其他判别法的基础.

(一) 通项大小比较法

定理9.7 设有两个正项级数$(A)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$(B)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，它们满足：$0\leqslant a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 若(B)收敛，则(A)收敛；(2) 若(A)发散，则(B)发散.

证明 记(A),(B)的部分和各为 S_n,σ_n,则由题设易知

$$S_n\leqslant\sigma_n\ (n=1,2,\cdots).$$

(1) 因为级数(B)收敛,所以$\{\sigma_n\}$是有上界的,由此知$\{S_n\}$是有上界列,即(A)收敛.

(2) 因为级数(A)发散,所以当 $n\to\infty$时,$S_n\to+\infty$. 由此知 $\sigma_n\to\infty\ (n\to\infty)$,即$\{\sigma_n\}$是无界列,级数(B)发散.

注意,上述定理中的比较条件如果改为 $0\leqslant a_n\leqslant b_n,n\geqslant n_0$,(其中 n_0 为任一正整数)那么结论仍成立. 如果改为 $0\leqslant a_n\leqslant Mb_n(b=1,2,\cdots)$. (其中 M 为正的常数)那么结论仍成立.

此外,若有 $0<d_n<M\ (n=1,2,\cdots)$,使得 $0\leqslant a_n\leqslant d_nb_n(n=1,2,\cdots)$,则定理结论也成立.

推论 9.2 设 $a_n>0,b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}\ (n=1,2,\cdots),$$

则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可导出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

事实上,令 $d_n=\frac{a_n}{b_n}>0\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$d_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}=d_n\leqslant d_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant d_1$$

这说明$\{d_n\}$是有界正数列,注意到 $a_n=d_nb_n(n=1,2,\cdots)$,即得所证.

注 在直接应用比较判别法时,我们必须预先掌握某些最基本的收敛或发散级数的范例,才能选出比较的对象,这叫做"手上有典型". 自然,这需要逐步地积累经验. 不过,记住下述关系是有益的:

对于充分大的 n,有 $e^{an}\gg n^b\gg(\ln n)^c$,其中 a,b,c 是正数.

例 1 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}(p>0)$.　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^p}(p>0)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$.

解 (1) 因为当 n 充分大时有 $\frac{1}{(\ln n)^p}>\frac{1}{n}$,所以该级数发散.

(2) 因为 $\ln(n!)=\sum_{1}^{n}\ln k>n-2$,所以当 $p\leqslant 2$ 时该级数发散;又由

$$\frac{\ln(n!)}{n^p}<\frac{n\ln n}{n^p}=\frac{\ln n}{n^{p-1}},$$

可知 $p>2$ 时该级数收敛.

(3) 记 $a_n=\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$,我们有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n-1}e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!\ n^{n-2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e}$$

$$<\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}.$$

令 $b_n=\frac{1}{n^2}$,则得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的收敛性即得所证.

例 2 若 $\{na_n\}$ 是有界数列,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

证明 注意 $a_n^2=\frac{(na_n)^2}{n^2}\leqslant\frac{M^2}{n^2}$,其中已经设定 $|na_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$.

例 3 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,试判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$.

解 (1) 若有 $a_n\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$,则因为

$$\frac{a_n}{1+a_n}\geqslant\frac{a_n}{1+M}\ (n=1,2,\cdots),$$

所以级数发散. 否则,存在$\{n_k\}$,使得$a_{n_k}\to+\infty$,从而有$\dfrac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}\to 1\ (k\to+\infty)$. 这不满足级数收敛的必要条件,故该级数发散.

(2) 注意到$\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}=\dfrac{1}{n^2+\dfrac{1}{a_n}}<\dfrac{1}{n^2}$,即知该级数收敛.

注 对正项收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,不一定都是$a_n<\dfrac{1}{n}\ (n>n_0)$,例如级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n:a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & n\neq k^2,\\ \dfrac{1}{n}, & n=k^2\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots).$$

思考练习 解答下列问题:

1. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 皆收敛,试证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

2. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛,试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$收敛.

3. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^3$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^3$ 皆收敛,试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_nc_n)$收敛.

4. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛. 再证明其逆命题不真,但在条件$\{a_n\}$为递减列时成立.

5. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且有$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,

试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

6. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)^2$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos \frac{1}{n}\right)$.(提示:可用半角公式化为正弦函数)

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$. (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2}$.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项发散级数,试论

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$$

的敛散性.

8. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛,试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. $\left(提示:由定理 9.6 可知 \sqrt{n}a_n \to 0\ (n\to\infty)\right)$

9. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, $a_n\to a>0\ (n\to\infty)$,试证明下列两级数同敛散.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n|$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$.

10. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{mn}\to a_n\ (m\to\infty)$, $|a_{mn}|\leqslant b_n\ (m\geqslant 1, n\geqslant 1)$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,试证明 $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

11. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$ 收敛. $\left(提示:分别讨论 a_n^{\frac{n}{n+1}}<2a_n 和 >2a_n\right)$

(二) 通项趋势比较法

剖析一下正项级数判敛的通项大小比较法可知,在通项趋于

0的情况下,实际上是在比较通项趋于0的快慢问题.从而就有了下述极限形式的比较判别法,在应用中它也给我们带来方便.

定理 9.8 设$(A)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$(B)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$是两个正项级数,若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,$$

则当$l>0$时,此两级数同敛散.

证明 由题设知,对$\varepsilon=\frac{l}{2}>0$,存在$N$,当$n>N$时有

$$\frac{l}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}l \quad 或 \quad \frac{l}{2}b_n<a_n<\frac{3l}{2}b_n.$$

从而,根据通项比较大小法可知,若(B)收敛,则(A)收敛;若(B)发散,则(A)发散,即得所证.

注 当$l=0$时,若(B)收敛,则(A)必收敛.当$l=1$时,即a_n与b_n渐近相等时,这种情形更易理解.

例 4 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6-3n^2+1}}$. (2) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^p\ (p>0)$.

解 (1) 因为$\frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6-3n^2+1}}\sim\frac{2}{n}\ (n\to\infty)$,所以此级数发散.

(2) 因为$\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to1\ (n\to\infty)$,所以此级数发散.

(3) 注意到$n\to\infty$时有

$$\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

从而可知$\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^p\sim\left(\dfrac{2}{3n}\right)^p(n\to\infty)$,这说明此级数在 $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散.

例 5 数列 $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\ (n=1,2,\cdots)$是收敛的.

证明 将 a_n 表示为 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+a_1\,(n=1,2,\cdots)$,则有

$$a_n=-1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2}.$$

因为$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2}\sim\dfrac{1}{2k^{\frac{3}{2}}}\ (k\to\infty)$,所以上式右端级数收敛.从而也说明$\{a_n\}$是收敛列.

注 上述通项极限比较法是针对正项级数而发的,对于非正项级数其结论是不正确的.例如对

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}},\ b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots),$$

在学过本章 4.3 节后,容易得出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,但易知$\dfrac{b_n}{a_n}\to 1\ (n\to\infty)$.

思考练习 解答下列问题:

1. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}a_n$ 也收敛.

2. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且 $a_n\to a\,(n\to\infty)$. 试论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a_n}}$的敛散性.

3. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^p\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^p(a>1)$.

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^p\arctan(n^q)$. (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^p$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}\cdot(n+b)^{n+a}}$, $(a,b>0)$.

4. 设 $0<a_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$,且 $a_n\to1$ $(n\to\infty)$. 试证明下述两级数同敛散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt[n]{a_n}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a_n)}{n}.$$

$\left(\text{提示: } \sqrt[n]{a_n}=[1-(1-a_n)]^{\frac{1}{n}}=1-\frac{1-a_n}{n}+o(1)\ (n\to\infty)\right)$

5. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,\mathrm{d}x}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{n+1}\mathrm{e}^{-4\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

6. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,试问必有 $a_n\geqslant\frac{1}{n}$ $(n\geqslant n_0)$吗?

3.3 比值判别法,根值判别法

定理 9.9 (d'Alembert[①] 〈比值〉判别法) 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(1) 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 (1) 当 $l<1$ 时,由题设可知,存在 q,$l<q<1$ 以及正整数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,有

① 达朗贝尔(1842~1917),法国数学家.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \quad 或 \quad a_{n+1}<qa_n.$$

也就是说,我们有

$$a_{N+1}<qa_N, a_{N+2}<q^2a_N, \cdots, a_{N+n}<q^na_N, \cdots.$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{N} a_n+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\leqslant\sum_{n=1}^{N} a_n+a_N\sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$

根据几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 在 $0<q<1$ 时的收敛性,可知原级数收敛.

(2) 当 $l>1$ 时,由题设可知,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \text{ 或 } a_{n+1}>a_n.$$

也就是说,我们有

$$a_N<a_{N+1}<a_{N+2}<\cdots.$$

这说明通项在 $n\to\infty$时不趋于 0,故级数发散.

注 1. 比值判别法是对级数自身前后项之比(后者居上)的极限作出的判断,因此这一判别法在表面上不必借助于外部,但其实质仍是与几何级数比较而来.此外,当 $l=1$ 时,原级数也可能收敛,也可能发散,例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

当然,如果此时再有条件$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ $(n\geqslant N)$,那么级数是发散的了.

2. 在条件$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$下,原级数当然是发散的.

例 1 试论通项如下所示之级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性:

$$(1)\ a_n=\frac{\alpha^n}{n!}\ (\alpha>0); \quad (2)\ a_n=\frac{3^n n!}{n^n}.$$

解 (1) 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\alpha^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n+1}=0<1,$$

所以级数收敛.

(2) 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1,$$

所以级数发散.

推论 9.3 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots>0$,且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{2n}}{a_n}\right)=l$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $l<\frac{1}{2}$ 时收敛,在 $l>\frac{1}{2}$ 时发散.

证明 根据凝聚判别法,我们只需考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 的敛散性. 因为我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{a_{2\cdot 2^n}}{a_{2^n}}=2l,$$

所以根据比值判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 在 $l<\frac{1}{2}$ 时收敛,在 $l>\frac{1}{2}$ 时发散.

注 1. 在推论 9.3 的条件下,若 $l=\frac{1}{2}$,则无法得出确定的结论. 如考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

2. 比值判别法的逆命题是不成立的,可举反例如下:设

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots,$$

易知该级数收敛,但不存在 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

定理 9.10(Cauchy 根值判别法) 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,且存在

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=l,$$

我们有结论

(1) 若 $l<1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $l>1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 (1) 当 $l<1$ 时,易知存在 $q:l<q<1$,以及 N,使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\sqrt[n]{a_n}<q \quad 或 \quad a_n<q^n.$$

从而可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}q^n.$$

注意到几何级数的收敛性,可知原级数收敛.

(2) 当 $l>1$ 时,易知存在 $l>q>1$ 以及子列 $\{n_k\}$,使得

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}}>1 \text{ 或 } a_{n_k}>q^{n_k}\to+\infty \ (k\to\infty).$$

这说明当 $n\to\infty$时,通项不趋于零,故级数发散.

例 2 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性,其中 a_n 为

$$(1)\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}};\quad (2)\ \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}.$$

解 (1) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

即知级数收敛.

(2) 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+5}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n=\frac{3}{\mathrm{e}}>1,$$

即知级数发散.

注 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ 时,有可能收敛,也有可能是发散的,例如 $a_n=\frac{1}{n}$ 和 $a_n=\frac{1}{n^2}$.

例3 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$ 的敛散性.

解 引用 Stirling 公式:$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\quad(n\to\infty)$,可知

$$\sqrt[n]{a_n}\sim\frac{n}{\mathrm{e}}(2\pi)^{\frac{1}{2n}}n^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}\sim\frac{n}{\mathrm{e}}\quad(n\to\infty).$$

这说明该级数发散.

注 1. 为判定一个正项级数的敛散性,何时采用比值判别法,何时采用根值判别法,还要看取比值或取根值后化简的情况而定,它与原通项的数量结构有关.

2. 根值判别法也是建立在与几何级数比较的基础上的,虽然在判别时表面上并不借助于外部.此外,根值判别法优于比值判别法.(见本章末之注记)

3. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性的比值判别法还可推广如下:n_0 是固定的自然数,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+n_0}}{a_n}=l\begin{cases}<1, & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛},\\ >1, & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}.\end{cases}$$
(见1971年美国数学月刊)

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 6\cdots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$.

2. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=s,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=t.$$

若 $s\cdot t<1$,试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.(提示:存在 $s<s'$,$t<t'$;$s't'<1$,当 $n\geqslant N$ 时,有 $a_{2n}<s'\cdot a_{2n-1}<s't'a_{2n-2}<\cdots<(s't')^{n-N}a_{2N}$,以及 $a_{2n+1}<t'(s't')^{n-N}a_{2N}$)

3. 判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.　　(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^b(\ln n)^c}$,$(a>0)$.

4. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且存在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

试证明存在 q_1;$q_1>q$,使得 $a_n=O(q_1^n)$.

5. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{2n}}=l$,试论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=l$,试论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

6. 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 为正数列,若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l_1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=l_2,$$

试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 在 $l_1\cdot l_2<1$ 时收敛,在 $l_1\cdot l_2>1$ 时发散.(提示:参阅本章论证命题 9.2)

3.4　推广的比值型和根值型判别法

比值判别法和根值判别法是以几何级数为比较标准而建立的.因此,如果一个正项级数比几何级数的收敛还要慢,那就不能从比较中得出判断了(或者,在这两种判别法中的极限等于 1 时,也不能得出任何信息).从而人们自然地去寻求另外的比较标准,它们比几何级数的收敛速度要慢.

例如 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在 $p>1$ 时是收敛的,而又有$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{\frac{1}{n^p}}=0$, $|q|<1$. 又如级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$是收敛的,但又有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{n(\ln n)^2}}\right)=0.$$

(一) 比值型

所谓比值型的判别法,是指判别法则的陈述中呈现通项比值$\frac{a_n}{a_{n+1}}$的形式.推广当然是指比原有的 D'lembert 比值判别法更有效.下面要介绍的各种判别法的基础仍是一种比较判别法,只不过是与 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$比较罢了.(因此,对这些判别法的表达式中出现因子 n,也就可以理解了.)

引理 9.1(对数比值型判别法) 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,且存在

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=l,\ (-\infty\leqslant l\leqslant+\infty),$$

(1) $l>1$ 时,级数收敛; (2) $l<1$ 时,级数发散.

证明 (1) 由题设知,存在 $p>1$,以及 N,使得 $p<n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$ $(n>N)$. 由此可知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>e^{\frac{p}{n}},\ n>N.$$

注意到数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是递增趋于 e $(n\to\infty)$的,从而又有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=\frac{(n+1)^p}{n^p},即\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

现在,视 $b_n=\frac{1}{n^p}$,则由 $p>1$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.根据推论 9.2 即得所证.

(2) 由题设知,存在 N,使得

$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<1<n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right),\quad n>N.$$

由此可知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{n-1}\text{ 或 }\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}.$$

现在视 $b_n=\frac{1}{n}$,知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.从而根据推论 9.2 即得所证.

例 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$ 是收敛的.

证明 因为我们有

$$\begin{aligned}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}&=n\ln\frac{n^{n-1}e^{n+1}(n+1)!}{e^n n!\ (n+1)^n}\\&=n\ln\left\{e\frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\}\\&=n\left\{1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=n\left\{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\}\\&=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+o(1)\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3}{2}>1$.即得所证.

定理 9.11(Raabe[①] 判别法) 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,满足 $a_n>0$

① 拉贝(1801～1859),瑞士数学和物理学家.

$(n=1,2,\cdots)$,且有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l \quad (-\infty\leqslant l\leqslant+\infty). \qquad ①$$

(1) 若 $l>1$,则级数收敛;(2) 若 $l<1$,则级数发散.

证明 记 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=b_n$,则由题设知 $b_n\to l\ (n\to\infty)$. 另一方面,又有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{b_n}{n} \quad 或 \quad n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=b_n\ln\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^{\frac{n}{b_n}}.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^{\frac{n}{b_n}}=\lim_{n\to\infty}b_n=l.$$

根据对数比值型判别法,(1),(2)成立.

注 当 $l=1$ 时,Raabe 判别法失效. 如对级数(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$,我们均有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1.$$

但(1)发散,(2)收敛.

例 2 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性,其中

$$a_n=\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})} \quad (n=1,2,\cdots).$$

解 因为我们有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=1+\frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

所以

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{2n}{\sqrt{n+1}}\to+\infty \quad (n\to\infty).$$

根据 Raabe 判别法,可知该级数收敛.

注 1. 由上例可知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1\ (n\to\infty)$,从而 D'lembert 判别法失效,这

说明 Raabe 判别法更有效.

2. Raabe 判别式①也可写为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty);\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{l}{n}\right)\to 0\ (n\to\infty).$$

(二) 根值型

定理 9.12 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,若有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[\ln n]{a_n}=l,$$

则 $l<\frac{1}{\mathrm{e}}\ \left(>\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛(发散).

证明 当 $l<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,则存在 $p>1$ 以及 N,使得

$$\sqrt[\ln n]{a_n}<\frac{1}{\mathrm{e}^p},\ n>N\ 或\ a_n<\frac{1}{\mathrm{e}^{p\ln n}}=\frac{1}{n^p}\ (p>1),n>N.$$

由此易知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 类似地可证后一种情形.

例 3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^{\ln n}$ 发散

证明 只需注意 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[\ln n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=1>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 即可.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ \mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$.

$\left((2)\ 提示:\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty)\right)$.

2. 试证明 Raabe 判别法与下述审敛法等价:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n<\frac{1}{\mathrm{e}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\ 收敛;$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n>\frac{1}{\mathrm{e}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\ 发散.$$

3. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且有

$$\lim_{n\to\infty}(na_n)^{\frac{1}{\ln(\ln n)}}=l,$$

试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $l<\frac{1}{e}$ 时收敛,在 $l>\frac{1}{e}$ 时发散.(提示:存在 $p>1,(na_n)^{\frac{1}{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{e^p},n>N;a_n>\frac{1}{n\ln n},n>N$)

3.5 积分判别法

在本章的前言中,我们曾提到级数与反常积分只是两种不同变量的求和方式,而用连续变量的方式来探讨离散整序变量的问题大家早已见过.因此,利用某些积分运算的简便性,对许多正项级数的审敛工作带来方便性是可以预见的.

定理 9.13(积分判别法) 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列.若存在 $[1,\infty)$ 上的连续递减函数 $f(x)$,使得

$$f(1)=a_1,f(2)=a_2,\cdots,f(n)=a_n,\cdots,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

证明 (1) 设 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.由于

$$a_k=f(k)=f(k)[k-(k-1)]\leqslant\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{k=2}^{n} a_k\leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

故该级数的部分和有界,即收敛.

(2) 设 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=+\infty$.由于

$$a_k=f(k)=f(k)[(k+1)-k]\geqslant\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x,$$

故可知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=+\infty$,即级数发散.

例 1 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且有 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k>1\ (n=1,2,\cdots)$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$发散. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n(\ln S_n)^2}$收敛.

证明 (1) 注意到 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 就有

$$\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n\ln S_n}\geqslant\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$$
$$=\ln(\ln S_{n+1})-\ln(\ln S_n),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_k\ln S_k}\geqslant\ln(\ln S_{n+1})-\ln(\ln a_1),$$

由此即知该级数发散.

(2) 留给读者.

例 2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛正项级数,记 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$在 $p>1$ 发散; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{R_{n-1}^p}$在 $p<1$ 时收敛.

证明 不妨假定 $p>0$.

(1) $p>1$ 时,我们有

$$\frac{a_n}{R_n^p}=\frac{R_{n-1}-R_n}{R_n^p}>\int_{R_n}^{R_{n-1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$
$$=\frac{1}{1-p}(R_{n-1}^{1-p}-R_n^{1-p}).$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{R_k^p}>\frac{1}{1-p}(R_1^{1-p}-R_n^{1-p}).$$

由此即知该级数在 $p>1$ 时发散.

(2) $p<1$ 时的证明留给读者.

注 我们曾经指出,正项级数敛散性的判别法基于比较判别法. 因此,自然希望有一个收敛速度最慢的级数和一个发散速度最慢的级数来作为比较的标准,但这是不可能的. 例如

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_{n-1}}$发散.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项发散级数,$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k>1$ $(n=1,2,\cdots)$,试论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$的敛散性.

2. 设 $a_1>0$ 且定义

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^p} \ (n=1,2,\cdots,0<p<1).$$

试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\left(\text{提示}: a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}\right)$

§ 4 一般项级数收敛与发散的判别法

这里“一般项级数”指的是可带任意符号的数项所组成的级数. 自然,当数项的符号是杂乱无规则可循时,将给级数判敛的工作带来困难. 因此,我们只能求助于普适的极限理论——Cauchy 收敛准则,或者干脆将级数每一项都取绝对值使其成为新的正项级数来审敛. 如果新级数是收敛的,那当然很理想(此时,原级数也收敛). 但如果新级数不收敛,那么对原级数敛散性的判定还得另找出路. 对此,我们的办法不多,只能介绍一种级数各项的符号变化呈现交错性的“交错级数”的审敛法.

4.1 级数收敛的充分必要条件

定理 9.14(Cauchy 准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是:对任给的 $\epsilon>0$,存在 N,当 $m>n\geqslant N$ 时,有

$$\left|\sum_{n+1}^{m} a_k\right| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m| < \varepsilon. \qquad ①$$

证明 因为级数的敛散性就是其部分和数列的敛散性，所以若记其部分和为 S_n，则 S_n 的收敛性等价于：对任给的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $m>n\geqslant N$ 时，有

$$|S_m-S_n|<\varepsilon \text{ 或 } \left|\sum_{n+1}^{m} a_k\right|<\varepsilon.$$

通常，式①也写成：当 $n\geqslant N$ 时，对任意正整数 p，有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k\right| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}| < \varepsilon.$$

此外，在判断级数发散时，自然应陈述为

“若存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 N，存在 $n_0\geqslant N$ 以及正整数 p_0，使得

$$\left|\sum_{n_0+1}^{n_0+p_0} a_k\right| = |a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0.\text{”}$$

例 1 设 $\{a_n\}$ 是递增无界正数列，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 是发散的.

证明 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，由 $a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$ 可知，对任意给定的 N，当 p 充分大时，有 $a_{N+p}>2a_N$. 从而可得

$$\sum_{n=N}^{N+p}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \sum_{n=N}^{N+p} a_n\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\geqslant a_N\left(\frac{1}{a_N}-\frac{1}{a_{N+p+1}}\right) = \left(1-\frac{a_N}{a_{N+p+1}}\right) > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

根据 Cauchy 收敛准则，即得所证.

例 2 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，$p>0$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^p}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{n^p}=0$.

证明　对任给 $\varepsilon>0$,由题设知,存在 $N,n_0:n_0>N$,当 $n>n_0$ 时,有

$$\sum_{k=N+1}^{n}\frac{a_k}{k^p}<\frac{\varepsilon}{2};\quad \sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{n^p}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n^p}=\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{n^p}+\sum_{k=N+1}^{n}\frac{a_k}{n^p}<\varepsilon.$$

思考练习　解答下列问题:

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足条件:对任意正整数 p,有 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})\to 0\ (n\to\infty)$,试问 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛吗?

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛正项级数,试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{R_n^p}(p\geqslant 1)$发散.

3. 设$\{a_n\}$是递增正数列,$a_n\to a\ (n\to\infty)$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a-a_n)$收敛当且仅当存在 $l>0$,使得$\frac{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}{a^n}\to l\ (n\to\infty)$. $\left(\text{提示:题设条件等价于}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{a_n}{a}\right)\text{收敛,注意}\ln\left(\frac{a_n}{a}\right)=-\frac{a-a_n}{a}+O((a-a_n)^2)\ (n\to\infty)\right)$

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 若$\{na_n\}$是递减收敛于 0 的,则 $a_n=o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$. $\left(\text{提示:}\sum_{k=m+1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n-m}\frac{(m+k)a_{m+k}}{m+k}\geqslant na_n\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}=na_n\ln\frac{n}{m}+o(1),\ n\to\infty\right)$

4.2　级数的绝对收敛与条件收敛

用 4.1 节中介绍的 Cauchy 准则来判别级数的敛散性,在

实践中并不很方便.因此,干脆学习反常积分的做法,考察绝对收敛将其纳入正项级数审敛的格式.与反常积分不同的是,由于级数是离散地求和,将其正项和负项分开来讨论是方便的.在后文中我们将看到,绝对收敛概念的重要性,更在于它可以保证无穷级数的运算性质雷同于有限个数项求和之间的运算性质.

设有带正负项的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad ①$$

令

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0, \\ 0, & a_n < 0. \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n > 0. \end{cases}$$

显然,我们有

$$a_n^+ \geqslant 0, a_n^- \geqslant 0; a_n = a_n^+ - a_n^-, |a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

由此易知,当级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

均收敛时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 就收敛了.

定义 9.2 对于级数①,若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad ②$$

收敛,则称级数①为绝对收敛;若级数①收敛,但级数②发散,则称级数①为条件收敛.

定理 9.15 设级数①绝对收敛,则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 收敛;

(2) 级数①收敛(即绝对收敛的级数必为收敛级数),且有

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad ③$$

证明 (1) 由不等式

$$a_n^+\leqslant|a_n|,\ a_n^-\leqslant|a_n|\ \ (n=1,2,\cdots)$$

即得所证.

(2) 由关系式 $a_n=a_n^+-a_n^-\ (n=1,2,\cdots)$,即知级数①收敛.又由不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|\ \ (n=1,2,\cdots),$$

即知式③成立.

推论 9.4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.若有 $|b_n|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n$ 绝对收敛.

证明 只需注意 $|a_n\cdot b_n|\leqslant M|a_n|$ 即可.

推论 9.5 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 条件收敛.

例 1 判别下列级数的绝对收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\arctan\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}-\sin\left(\dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right\}$.

解 (1) 注意 $0\leqslant\ln(1+x)\leqslant x\ (x\geqslant0)$,$|\arctan x|\leqslant|x|$,就有(记通项为 a_n)

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{6}{5}}}.$$

故该级数绝对收敛.

(2) 记其通项为 a_n,我们有

$$a_n=\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}-\left[\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n^2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty).$$

故该级数绝对收敛.

例 2 设$f(x)$定义在$[-1,1]$上,$f''(0)$存在,且令

$$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是:$f(0)=f'(0)=0$.

证明 必要性.假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$.注意到$f(x)$在 $x=0$ 处的连续性,可知

$$0=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0).$$

为证 $f'(0)=0$,采用反证法,即假定 $f'(0)=a\neq 0$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=|f'(0)|=|a|\neq 0.$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,矛盾.

充分性.由根据带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$\begin{aligned}a_n&=f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

立即可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列级数的绝对收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7-3n+4}}$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^p}\right)$,$(p>1)$.

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛,试证明下列级数也一样.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}a_n$.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛,试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$

绝对收敛.

4. 设对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 用比值或根值判别法判定为发散的，试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是发散的.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是条件收敛级数，试证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=+\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty.$$

6. 设 $\{a_n\}$ 是有界数列，$\{b_n\}$ 是递减正数列，试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(b_n-b_{n+1})$ 是绝对收敛的.

7. 设 $f\in C^{(3)}([-1,1])$，试证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right]-2f'(0)\right\}\text{收敛.}$$

4.3　交错级数收敛的判别法

如果一个变号级数不绝对收敛，怎么办呢？一般而言，在非绝对收敛的变号级数中，那些带负值的项对减慢其部分和的增长速率总有利吧！这种设想对通项递减趋于 0 的变号级数是很自然的，其典型就是交错级数.

定义 9.3　若一个级数中的前后相继项的正负号是交错地出现的，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\text{或}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

其中 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，则称它们为**交错级数**.

例如级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

是交错级数.

关于交错级数的敛散性，我们有下面的基本判别法则：

定理 9.16(Leibniz 判别法) 若数列$\{a_n\}$是递减趋于零的，则交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

是收敛的,其和 S:$0\leqslant S\leqslant a_1$.

证明 记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$,由题设知

$$\begin{aligned}S_{2n}&=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}\\&=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})\geqslant S_{2n-2}\,(n\geqslant 2).\end{aligned}$$

类似地又有

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\leqslant a_1.$$

这说明$\{S_{2n}\}$是递增有界列,不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=S$.

另一方面,由 $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ 又可知$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$. 即得所证.

例 1 考察级数

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^p}+\cdots\quad(p\geqslant 1)$$

的收敛性.

解 这是一个交错级数,我们有

(1) 若 $p=1$,则因通项递减趋于 0,故由 Leibniz 判别法可知,该级数收敛;

(2) 若 $p>1$,则记 $a_{2n-1}=\dfrac{1}{2n-1}$,$a_{2n}=\dfrac{1}{(2n)^p}$,该级数的前 $2n$ 项部分和可写为

$$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{n=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k}.$$

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2k}$ 收敛,因此原级数发散.

例 2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ 是发散的.

证明 注意到(分子、分母同乘以$(\sqrt{n}-(-1)^{n-1})$)

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^{n-1}}{n-1}$$

$$=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{n-1}\ (n\geqslant 2),$$

且$\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$是随$n$增大而递减趋于0,可知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$收敛,而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$是发散的.这说明原级数发散.

例3 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$是收敛的.

证明 应用 Taylor 公式,我们有

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)(n\to\infty).$$

注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$是收敛的,上式右端第二项是绝对收敛级数的通项,即得所证.

例4 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$的敛散性.

解 (1) 把级数的通项写成

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+a^2}-n)\pi]$$

$$=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+a^2}-n)\pi=(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.$$

(2) 由(1)可知,当n充分大时(a是定数),该级数是交错级数.又易知$\sin\left[\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right]$是递减趋于0的(在$n$大于某个$N$后加以考察).从而根据 Leibniz 判别法,可知该级数收敛.

例5 设$a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots\to 0\ (n\to\infty)$,记$\sigma_n=a_n-$

$a_{n+1}+a_{n+2}-\cdots$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sigma_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

证明 (1) 由 $a_n\sigma_n < a_n^2$ 知充分性成立.

(2) 由 $\sigma_n = a_n - \sigma_{n+1}$,可知

$$a_n^2 = (\sigma_n + \sigma_{n+1})^2 \leqslant 2(\sigma_n^2 + \sigma_{n+1}^2) < 4\sigma_n^2,$$ 必要性成立.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$. (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{6}\right)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$. (6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\ln n}\right)$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$. (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

(9) $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4^2}+\cdots$.

2. 设 $\{a_n\}$ 是递减收敛于 0 的数列,试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛.

3. 试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛,其中

$$a_{2n-1}=\frac{1}{n},\quad a_{2n}=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}.\quad (n=1,2,\cdots)$$

4. 设 $\{a_n\}$ 是有界数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛,试问 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 必收敛吗?

5. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散. 试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$ 收敛.

6. 设正数列$\{a_n\}$满足$a_n\to 0(n\to\infty)$,试问$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$一定收敛吗?

4.4 乘积项级数收敛的判别法

与反常积分类似,级数的通项也常表现为两种不同型数值结构的项的乘积.且相应地出现了Dirichlet和Abel的收敛判别法.

引理9.2(Abel) 设$\{a_n\}$是单调数列,数列$\{b_n\}$满足

$$B_n=\sum_{i=1}^{n}b_i,\ |B_n|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots),$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$的部分和满足

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant M(|a_1|+2|a_n|)\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明 对乘积的和式$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$应用Abel变换,已知有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}B_i(a_i-a_{i+1})+a_nB_n.$$

从而由$\{a_n\}$的单调性可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|B_i||a_i-a_{i+1}|+|a_nB_n|$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+M|a_n|=M\left|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})\right|+M|a_n|$$

$$=M|a_1-a_n|+M|a_n|\leqslant M(|a_1|+|a_n|)+M|a_n|$$

$$=M(|a_1|+2|a_n|)\quad(n=1,2,\cdots).$$

即得所证.

定理9.17(Dirichlet判别法) 设

(1) $\{a_n\}$是单调数列,且$a_n\to 0\ (n\to\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和有界,即存在$M>0$,使得

$$|B_n|\leqslant M, B_n=\sum_{i=1}^{n} b_i, (n=1,2,\cdots)$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 根据 Cauchy 收敛原理,只需考察和式 $\sum\limits_{n+1}^{n+p} a_i b_i$ 在 n 充分大且 p 是任意正整数时的大小. 由(2)可知

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} b_i\right|=|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|=|B_{n+p}-B_n|\leqslant 2M.$$

从而应用 Abel 引理得到

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_i b_i\right|\leqslant 2M(|a_{n+1}|+2|a_{n+p}|).$$

因为 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$,所以对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,有 $|a_n|<\frac{\varepsilon}{6M}$.

这样,对于当 $n>N$ 时,对任意的正整数 p,我们有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_i b_i\right|<2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

即得所证.

注 交错级数的 Leibniz 判别法是 Dirichlet 判别法的特殊情形. 这是因为视 $b_n=(-1)^{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$的部分和是有界的,即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\leqslant 2.$$

若$\{a_n\}$是递减列,且 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 1 对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$收敛.

证明 对 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,注意不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right|$$

$$=\frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\quad(n\geqslant1),$$

可视 $b_n=\sin nx,a_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则根据 Dirichlet 判别法,知该级数收敛.

注 1. 对于余弦函数,也有公式:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\quad(n\geqslant1).$$

由此可知 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}(x\neq2k\pi)$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ $(x\neq2k\pi)$收敛.

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$,$(x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$不是绝对收敛的.

证明 根据不等式

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos2nx}{2n}.$$

再注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos2nx}{2n}$收敛,即得所证.

例 2 对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$$

是收敛的.

证明 记 $a_n=\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{n}$,则由

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)=n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{n+1}$$
$$<n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

可知 $a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$. 此外,又由

$$0<a_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\frac{\ln n}{n}+\frac{c}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty),$$

可知 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$. 此外,因为有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\quad x\neq 2m\pi\ (m=0,\pm 1,\cdots),$$

所以根据 Dirichlet 判别法即得所证.

定理 9.18(Abel 判别法) 设

(1) $\{a_n\}$是单调有界数列; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 虽然 Abel 判别法可用 Abel 变换来证明,不过这里把它作为 Dirchlet 判别法的推论来导出.

由(1)不妨假定 $a_n\to a\ (n\to\infty)$,并令 $c_n=a_n-a(n=1,2,\cdots)$,此时当 $n\to\infty$时 c_n 单调趋于 0. 因为

$$a_nb_n=(a_n-a)b_n+ab_n=c_nb_n+ab_n,$$

而由(2)知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和有界,所以$\{c_n\}$与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 满足 Dirichlet 判别法的条件,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_nb_n$ 收敛. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例 3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$是收敛的.

证明 视 $a_n=\arctan n$，则 $\{a_n\}$ 是单调有界列；视 $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收敛的. 根据 Abel 判别法即得所证.

例 4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $x=x_0$ 处收敛，则此级数在 $x>x_0$ 处也收敛.

证明 因为我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\frac{1}{n^{x-x_0}},$$

注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，以及 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 在 $x>x_0$ 处随 n 增大而递减于 0，所以根据 Abel 判别法即得所证.

思考练习 解答下列问题：

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{\pi}{4}\right)}{\ln^2(n+1)}$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx\cdot\sin nx}{n}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

(提示：利用三角公式)

2. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln\ln(n+2)}\cos\frac{1}{n}$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2(2n)}{\sqrt{n}}$.

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}-n}{\ln n}$.　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}\arctan n$.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 发散.

4. 判别下述级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right\}\cos n.$$

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，试证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

$\left(记\ S_0=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k，注意\ \sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k+nS_n\right)$

§ 5 级数项序的重新排列

大家知道，在有限项的求和运算中，可以不必按前后次序进行，所得结果不变. 但这一结论对无穷项求和运算就不一定成立了. 例如在级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2 \qquad ①$$

中，将其求和顺序改变，重新排列为

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}+\cdots, \qquad ②$$

则其和为 $\frac{1}{2}\ln 2$.

事实上，记级数①之部分和为 S_n，②之部分和为 σ_n，则

$$\sigma_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2n}.$$

又由 $S_{2n}\to S(n\to\infty)$ 以及关系式

$$\sigma_{3n+1}=\frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2n+1},\quad \sigma_{3n+2}=\frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2},$$

可知 $\sigma_{3n+1}\to\frac{S}{2}(n\to\infty)$，$\sigma_{3n+2}\to\frac{S}{2}(n\to\infty)$. 即得所证.

级数求和次序的重新排列在收敛与求和问题中有重要的应用.于是,自然要问:在什么条件下?级数各项进行重排后其值不变.我们将看到绝对收敛在这里扮演着重要的角色.对此,先给级数重排一个确切的陈述:

级数(B): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是级数(A): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个**重排**是指,(A)与(B)的项之间存在一个一一同项对应,即(A)中每一项正是(B)中某一确定的项,反之亦然.显然,(A)与(B)互为重排级数.

定理 9.19(Dirichlet) 设级数(B): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是(A): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排.若级数(A)绝对收敛,则级数(B)也绝对收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

证明 分两步进行:

(1) 设(A)是正项级数,其和为 S,部分和记为 S_n;级数(B)之部分和记为 σ_n,显然有

$$\sigma_m \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad (m=1,2,\cdots),$$

故正项级数(B)之部分和序列有界,即(B)收敛.记其和为 σ,则 $\sigma \leqslant S$.

反之,视(A)为(B)的重排级数,同理可知(A)收敛,且有 $S \leqslant \sigma$.从而有 $\sigma = S$.

(2) 现在考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是任意项级数,且绝对收敛.为了应用(1)的结论,我们从级数分解为正部与负部级数来考察,注意到 $a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^-$ 皆非负,且有

$$\begin{cases} a_n = a_n^+ - a_n^-, \\ |a_n| = a_n^+ + a_n^-, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_n = b_n^+ - b_n^-, \\ |b_n| = b_n^+ + b_n^-, \end{cases}$$

从而知

$$\begin{cases} a_n^+ = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}, \\ a_n^- = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} b_n^+ = \dfrac{|b_n| + b_n}{2}, \\ b_n^- = \dfrac{|b_n| - b_n}{2}. \end{cases}$$

由于级数(A)绝对收敛,故级数(A^+): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 以及(A^-): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 皆收敛. 因为(A^+)与(A^-)皆为正项级数,而(B^+): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^+$ 与(B^-): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^-$ 是相应于(A^+)与(A^-)的重排级数,所以根据(1)中所述,(B^+)与(B^-)是收敛的,且其和也相同:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-.$$

于是,我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是绝对收敛的,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

注 1. 上述定理表明:对于正项级数,若是收敛的,则其和与级数中各项求和的先后次序无关;若是发散的,则其任意的重排级数也发散.

2. 对于正项级数或绝对收敛级数,其中的项可以任意地合并起来求和,而不影响其求和性质. 这一事实与有限项求和相同. 因此,绝对收敛亦称**无条件收敛**.

§6 两个级数的乘积

大家知道,对于两个各有有限项的求和式子,如

$$S=a_0+a_1+a_2,$$
$$\sigma=b_0+b_1+b_2,$$

其和的乘积可直接通过各项乘积的和算出：

$$S\cdot\sigma=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+(a_1b_2+a_2b_1)+a_2b_2.$$

对于两个无穷收敛级数,其和的乘积是否也可进行类似的操作？这一问题在无穷级数作为一种表达工具,特别是在函数项级数的展式中有着重要意义.下文将指出,绝对收敛概念在其中又扮演着重要角色.

设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$

$$\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}b_n=b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots.$$

首先,按照乘法的一般规则,当然是级数中每一项都应参加这一运算,我们将其全部排列如下：

$$\begin{matrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots & a_0b_n & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{matrix}$$

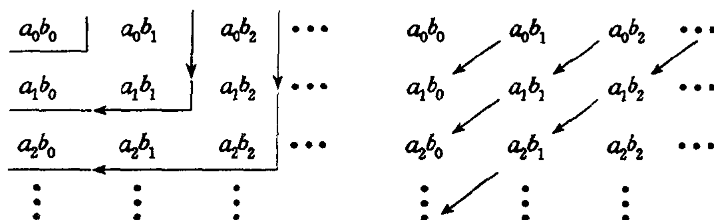
其次,是把这些两两乘积项全都加起来.按什么样的次序来加呢？一般而言,只要遵循从有限过渡到无限的原则,且保证一项不漏总是可以的,我们把它表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{i(n)}b_{j(n)}=a_{i(0)}b_{j(0)}+a_{i(1)}b_{j(1)}+\cdots+a_{i(n)}b_{j(n)}+\cdots,$$

这里的指标 n 表示求和次序,而 i,j 则表示各自来自(A),(B)的指标.不过,最简易的方式是方形序和对角线序：

方形序：$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_2+a_2b_2+$

$a_2b_1+a_2b_0)+\cdots$;



对角线序:$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots$.

其中,方形序求和式也可写为(若它的和存在)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}b_j\right);$$

对角线序求和式也可写为(若它的和存在)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_k=\sum_{k=0}^{\infty}C_k,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},$$

并称后者为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 的 Cauchy 乘积. (注意,如果是考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的 Cauchy 乘积,那么应表示为 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n, C_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$)

易知,当下述两个级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

均收敛,且其和各为 S,σ 时,此两级数的方形求和的乘积自然是 $S\cdot\sigma$. 然而,Cauchy 乘积的特征是,其中 C_n 的表达式内每项的两个足标和都是 n,这一整齐的规律性使此种乘积扩大了应用的范围(如在级数的表达性上). 因此,我们常用的是乘积的 Cauchy 形式.

关于无穷级数的乘法运算,主要有下面的结果:

定理 9.20(Cauchy) 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sigma$$

是绝对收敛的,则此两级数的乘积为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{i(n)} b_{j(n)} = S \cdot \sigma. \qquad ①$$

特别对 Cauchy 乘积有

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = S \cdot \sigma.$$

证明 (1) 由题设知,存在正数 M,使得对任意的正整数 N,都有

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| \leqslant M, \quad \sum_{n=0}^{N} |b_n| \leqslant M.$$

(2) 对任意的正整数 m,令 $N = \max\limits_{0 \leqslant n \leqslant m} \{i(n), j(n)\}$,易知

$$\sum_{n=0}^{m} |a_{i(n)} b_{j(n)}| \leqslant \sum_{i,j=0}^{N} |a_i| |b_j| = \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j| \right) \leqslant M^2.$$

由此可知式①中级数是绝对收敛的.

(3) 根据定理 9.19,绝对收敛级数的性质与各项求和次序无关.因此,特别利用方形求和次序,可知

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0) \\ & + (a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_0) + \cdots \\ = & \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i b_j = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_i \right) = S \cdot \sigma. \end{aligned}$$

从而式①成立.

例 1 在 $(-1,1)$ 上,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

绝对收敛,故在 $(-1,1)$ 上有

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1\cdot x^n+x\cdot x^{n-1}+\cdots+x^n\cdot 1)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

例 2 考察级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ 的自乘级数的敛散性.

解 记 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$,则 Cauchy 自乘级数的通项为

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1+n-k+1}}{(k+1)(n-k+1)}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+2}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right]$$

$$=2\frac{(-1)^n}{n+2}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right].$$

因为 $b_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n+1}$ 是递减趋于 0 的,所以自乘级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 收敛.

注 如果两个级数皆条件收敛,那么它们的 Cauchy 乘积可能发散.例如

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ (n=1,2,\cdots)$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的 Cauchy 乘积级数之通项为

$$C_n=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}.$$

根据不等式 $\sqrt{k(n-k+1)}\leqslant\frac{k+n-k+1}{2}=\frac{n+1}{2}$,可知

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}\geqslant\frac{2}{n+1},\ |C_n|\geqslant\frac{2n}{n+1}\geqslant 1.\ (n=1,2,\cdots)$$

这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 发散.

思考练习 试证明下列命题:

1. 记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,\infty)$,则

$$S(x+y)=S(x)+S(y),\ x,y\in(-\infty,\infty).$$

2. 若正项级数 $\sum_{k=0}^{n}a_n$ 收敛,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则它们的 Cauchy 乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n,\ C_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$$

发散.

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且其和各为 S,σ. 若此两级数的 Cauchy 乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n, C_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$$

也收敛,则其和为 $S\cdot\sigma$.(提示:参阅第十一章 §3中例 1)

注　记

(一) 级数发展史简介

古希腊数学家 Archimedes 曾计算过抛物弓形的面积 S(图 9-1,$\widehat{QPO}$ 是抛物线的中心弧段),他采用的是将图形分为许多小三角形的办法. 即如图所示,P 是$\widehat{QPO}$的顶点, 作三角形$\triangle QPO$; 再在两个小抛物弓形中作

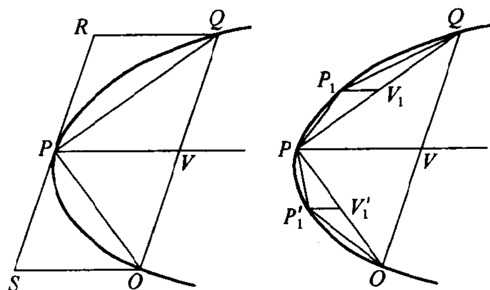


图 9-1

两个小三角形$\triangle QP_1P$,$\triangle OP_1'P$,…依次作下去,并把这些小三角形面积加起来:

$$\triangle QPO+\triangle QP_1P+\triangle OP_1'P+\cdots.$$

但由于受当时的科学思想水平的限制,人们不理解“无限过程”这一观念的实质,把握不住如何进行“无限”次的运算.因此,最后 Archimedes 在作了有限项加法之后,用了巧妙的“穷竭法”,得到了关于抛物弓形与大三角形面积关系的正确等式:$S=\frac{4}{3}\triangle QPO$.

在我国,魏晋时代的刘徽(公元 3 世纪)在用“割圆术”计算圆面积时,让圆内接正多边形的边数成倍地增加,再把每次增加的小三角形面积累加起来,并指出“割之弥细,所失弥少.割之又割以至于不可割,则与圆合体而无所失矣.”这说明他也遇到了数项没完没了相加的问题,且相信其结果就是圆面积.也就是说,他有了数项无限制地加下去是可以收敛到一个定值的联想.只是由于古代的科学思想水平的限制,还不能作出进一步的发展而已.

在数学发展史中最早出现的无穷级数是公比小于 1 的几何级数,且在 16 世纪还有人得出了它的求和公式.1647 年,Gregory 在他的《几何著述》中还认识到 Achilles 追龟问题(Zeno 悖论)可用无穷几何级数的求和问题来解决.由于该无穷级数的和是有限的,故 Achilles 可以在一个确定的有限时间和地点追上乌龟.

级数的重要应用还在于计算一些特殊的量中的意义,例如 π,e,Leibniz 在 1664 年就得到过一个著名结论:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

然而在那个时代,包括 18 世纪,人们只是把无穷级数当作是一个有无穷多项的多项式来看待.虽然人们偶而遇到一些其和是无穷的级数,甚至 Gregory 还提出“收敛”与“发散”的名称,但是因为所取得的成功越来越多,就认为凡是“函数”都能用无穷级数表示,而在进行纯形式运算时,并没有认识到其中存在的困惑和问题的深刻性.

至 19 世纪,这种不加区别的使用无穷级数的状况无法再继续下去了,因为已经出现若干可疑或荒谬的结果.例如对无穷级数

$$1-1+1-1+\cdots-1+1-1\cdots.$$

 如果把它写为

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots,$$

那么结果等于 0;如果把它写为

$$1-(1-1)-(1-1)-\cdots-(1-1)+\cdots,$$

那么结果等于 1.

19 世纪 20 年代初期,在前人关于"无穷小分析"工作的基础上,Cauchy 首次提出了用部分和的极限来界定无穷级数的收敛概念,并指出有关级数的运算只有对收敛级数才是有效的(据说,他在法兰西科学院作这一宣讲时,曾引起学术界极大关注.例如数学家 Laplace(拉普拉斯)曾为此而仔细检验了在他著作中所述的级数的收敛性).Cauchy 在 1821 年的著作中,还给出了检验级数收敛的根值判别法以及充分必要条件.

(二) 用级数部分和数列的子列判敛法的推广

用级数部分和数列的子列的收敛性来判定该级数的收敛性的方法还可推广如下:

命题 9.1 设 $a_n\to 0\ (n\to\infty)$,记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

若存在正整数子列 $\{n_i\}$,使得

$$\lim_{i\to+\infty}S_{n_i}=S,\ \sup_{i\geqslant 1}(n_{i+1}-n_i)=M<+\infty,\text{则 } S_n\to S\ (n\to\infty).$$

证明 任给 $\varepsilon>0$,对于充分大的 n,不妨设

$$n_i<n\leqslant n_{i+1},\ |S_{n_i}-S|<\frac{\varepsilon}{2},\ |a_n|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

则

$$\begin{aligned}|S_n-S|&\leqslant|S_n-S_{n_i}|+|S_{n_i}-S|\\&\leqslant\sum_{n_i+1}^{n_{i+1}}|a_n|+\frac{\varepsilon}{2}<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(三) 根值判别法与比值判别法的比较

下述命题说明,根值判别法强于比值判别法:

命题 9.2 若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,则

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证明 只需指出

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},\ \varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}}.$$

在这里只讨论前一不等式.

记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=l$. 若 $l=+\infty$,则无所可证. 若 $l<+\infty$,则存在 l':$l<l'$以及 N,使得(参见定理 9.9 的证明)

$$a_n<a_N(l')^{-N}(l')^n,(n>N);\quad a_n^{\frac{1}{n}}<[a_N(l')^{-N}]^{\frac{1}{n}}\cdot l'.$$

令 $n\to\infty$,上式右端的极限是 l',可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n^{\frac{1}{n}}\leqslant l'$. 再令 $l'\to l$,即得所证.

例 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$,其中

$$c_n=\begin{cases}a^{\frac{n+1}{2}},n\text{ 是奇数},\\ b^{\frac{n}{2}},n\text{ 是偶数},\end{cases}\quad 0<a<b<1.$$

易知

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\begin{cases}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}},\ n\text{ 是奇数},\\ a\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}},\ n\text{ 是偶数};\end{cases}\quad c_n^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}a^{\frac{n+1}{2n}},\ n\text{ 是奇数},\\ b^{\frac{1}{2}},\quad n\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

从而可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{c_{n+1}}{c_n}=0,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{c_{n+1}}{c_n}=+\infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}c_n^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{2}},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}c_n^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{2}}<1.$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛,但比值判别法对此例无效.

(四)有关比值型判别法

更一般的比值型判别法还有下述 Kummer 的结果,它的一个特殊情形是 Gauss 判别法,其用途也很广泛.

命题 9.3(Kummer① 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散. 若有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\lambda,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $\lambda>0$ 时收敛,在 $\lambda<0$ 时发散.

证明 (1) 假定 $\lambda>0$,则存在 N,使得

① 库默尔(1810~1893),德国数学家.

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}>\frac{\lambda}{2}\ (n>N)\ 或\ a_{n+1}<\frac{2}{\lambda}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\ (n>N).$$

记 $S_n=\sum_{n=1}^{n}a_k$，则对上述不等式相加后，可知 $S_{n+1}<S_{N+1}+\frac{2}{\lambda}\sum_{i=N+2}^{n+1}\left(\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}-\frac{a_i}{b_i}\right)$，从而有

$$S_{n+1}<S_{N+1}+\frac{2}{\lambda}\left(\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),\quad S_{n+1}<S_{N+1}+\frac{2a_{N+1}}{\lambda b_{N+1}}\ (n>N).$$

这说明 S_n 是有界的，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 假定 $\lambda<0$，则存在 N，使得

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}<0\ (n>N),\quad 或\ \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\frac{a_n}{b_n}.$$

由此易知 $a_n>\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}b_n$. $n\geqslant N+2$. 从而由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散得到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

命题 9.4(Gauss 判别法) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足关系：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\quad(n\to\infty,\delta>0),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $\theta>1$ 时收敛，在 $\theta\leqslant1$ 时发散.

这是因为我们的 $O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\to\infty)$，所以只需看 $\theta=1$ 的情形(参见 Raabe 判别法). 此时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\ (n\to\infty),$$

取 $b_n=\frac{1}{n\ln n}$，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{(n\ln n)\left[1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\right]-(n+1)\ln(n+1)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{(n+1)\ln\frac{n}{n+1}+(n\ln n)O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\right\}=-1.\end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 是发散级数，所以根据 Kummer 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

例 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$ 的敛散性，其中 $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

解 令 $\binom{\alpha}{n}=(-1)^{n-1}b_n$，$b_n=\frac{(n-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\alpha}{n!}$，易知存在 N，当 $n\geqslant N$ 时 b_n 不变号，故不妨设为 $b_n>0(n\geqslant N)$. 因为

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{\alpha+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),(n\to\infty),$$

所以我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\begin{cases}\text{绝对收敛},\alpha\geqslant 0,\\ \text{条件收敛},-1<\alpha<0.\end{cases}$$

命题 9.5 若正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\ (n\to\infty,p>0),$$

则易证 $a_n\downarrow 0(n>N)$.

(五) 应用反常积分对级数部分和的量阶进行估算

应用反常积分的估算，对正项级数部分和的量阶还可作出更明确的公式.

命题 9.6 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上正值递减函数，且 $f(x)\to 0\ (x\to+\infty)$，令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\ t_n=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x,d_n=S_n-t_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

则 (1) $0<f(n+1)\leqslant d_{n+1}\leqslant d_n\leqslant f(1)\ (n=1,2,\cdots)$;

(2) 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n$;

(3) $0\leqslant d_k-\lim\limits_{n\to\infty}d_n\leqslant f(k)\ (k=1,2,\cdots)$.

证明

(1) $t_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)=S_n$;

$f(n+1)=S_{n+1}-S_n\leqslant S_{n+1}-t_{n+1}=d_{n+1}$; $0<f(n+1)\leqslant d_{n+1}$.

$$d_n-d_{n+1}=t_{n+1}-t_n-(S_{n+1}-S_n)=\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-f(n+1)$$

$$\geqslant\int_n^{n+1}f(n+1)\mathrm{d}x-f(n+1)=0.$$

故 $d_{n+1}\leqslant d_n$. 从而(1)成立.

(2) 由

$$0\leqslant d_n-d_{n+1}=\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-f(n+1)$$
$$\leqslant\int_n^{n+1}f(n)\mathrm{d}x-f(n+1)=f(n)-f(n+1),$$

$$0\leqslant\sum_{n=k}^{m}(d_n-d_{n+1})\leqslant\sum_{n=k}^{m}[f(n)-f(n+1)],k\geqslant 1.$$

从而可知　$d_k-d_{m+1}\leqslant f(k)$,即得所证.

注意,若记 $D=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$,则由(1)知 $0\leqslant D\leqslant f(1)$. 由(2)给出

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x-D\leqslant f(n);$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x+D+O(f(n)).$$

例 1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}=\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}+D+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),\alpha\neq 1.$

例 2　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\ln(\ln n)+D+O\left(\frac{1}{n}\right).$

关于级数与反常积分的相同敛散性,我们还有以下结果:

命题 9.7　设 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上连续可微. 若 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 同敛散.

证明　(1) 设 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$,则根据 Abel 变换可知

$$S_n=nf(n)-\sum_{k=1}^{n-1}k[f(k+1)-f(k)]$$
$$=f(1)+\int_1^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[x]f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=f(1)+\int_1^n f(x)+\int_1^n xf'(x)\mathrm{d}x-\int_1^n[x]f'(x)\mathrm{d}x.$$

由此知

$$S_n-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)+\int_1^n(x-[x])f'(x)\mathrm{d}x.$$

注意到$|(x-[x])f'(x)|\leqslant|f'(x)|$,上式右端的积分收敛. 这说明存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right),$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛.

(2) 假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛,易知 $f(n)\to 0\ (n\to\infty)$,再注意到$\int_1^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$收敛而使得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,故有$f(x)\to 0\ (x\to+\infty)$.

根据$\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 的收敛性,以及

$$\left|\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x-f(k)\right|=\left|\int_k^{k+1}[f(x)-f(k)]\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_k^{k+1}\left(\int_k^x f'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_k^{k+1}\left(\int_k^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_k^{k+1}\left(\int_k^{k+1}|f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_k^{k+1}|f'(t)|\mathrm{d}t,$$

可知存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\right).$$

从而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$的收敛性,即得所证.

(六) 关于绝对收敛与条件收敛

关于级数的绝对收敛和条件收敛,我们还有下列结果:

命题9.8 若对任意的收敛于 0 的数列$\{b_n\}$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 总收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必绝对收敛.

证明 反证法. 假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|$,则易知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_{n-1}}$发散,但若视$\frac{|a_n|}{S_{n-1}}$为 $a_n\cdot\frac{\mathrm{sgn}(a_n)}{S_{n-1}}$,且注意到$\frac{\mathrm{sgn}(a_n)}{S_{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$,则依题设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_{n-1}}$应收敛,矛盾. (符号 $\mathrm{sgn}(A)=+1$(若 $A>0$),-1(若 $A<0$))

命题9.9 若对任意的收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 总收敛，则 $\{a_n\}$ 有界变差 $\left(\text{指} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\text{绝对收敛}\right)$.

证明 只需指出：对任意收敛于 0 的数列 $\{S_n\}$，有 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n(a_n-a_{n+1})$ 收敛即可. 作 $b_n=S_n-S_{n-1}$，则 $b_n\to 0\ (n\to 0)$，且 $S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$(不妨设 $S_0=0$). 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$，即得所证.

注意，$\left\{\frac{1-(-1)}{2n}\right\}$是收敛列，但非有界变差列.

命题9.10 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|+a_k}{2}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|-a_k}{2}}=1.$$

(七) 对交错级数一个范例的和值估计

例 设 $p>0$，且记 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$，则 $\frac{1}{2}<S<1$.

证明 记

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

$$S_{2n-1}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right).$$

易知 $S_{2n}(S_{2n-1})$随 n 递增(减)，故可得

$$S<S_1=1,\quad S_{2n}<S<S_{2n-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

现在再考察 S_{4n-1}. 注意到$f(x)=\frac{1}{x^p}$在$(0,\infty)$是(下)凸函数，我们有

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}>\frac{2}{4^p},\ \frac{1}{7^p}+\frac{1}{9^p}>\frac{2}{8^p},\cdots,\frac{1}{(4n-1)^p}+\frac{1}{(4n+1)^p}>\frac{2}{(4n)^p}.$$

从而有估计

$$S_{4n+1}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(4n)^p}+\frac{1}{(4n+1)^p}$$

$$>1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}-\cdots-\frac{1}{(4n-2)^p}+\frac{1}{(4n)^p}=1-\frac{1}{2^p}S_{2n}.$$

由此易知

$$\lim_{n\to\infty}S_{4n+1}=S\geqslant 1-\frac{1}{2^p}\lim_{n\to\infty}S_{2n}=1-\frac{S}{2^p}.$$

这导致 $S\geqslant\dfrac{2^p}{2^p+1}>\dfrac{1}{2}$.

(八) 关于乘积项级数的收敛

命题 9.11(Dedekind 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 记 $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$,则 $b_n=B_n-B_{n-1}$,从而有

$$\left|\sum_{n+1}^{m}a_kb_k\right|=\left|\sum_{n+1}^{m}a_kB_k-\sum_{n+1}^{m}a_kB_{k-1}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=n}^{m-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right|+|a_mB_m-a_nB_n|,(m>n).$$

由题设知存在 $M>0$,使得 $|B_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$. 又设 $a_n\to a$ $(n\to\infty)$和 $B_n\to B$ $(n\to\infty)$,不妨记 $a_n=a+\varepsilon_n(\varepsilon_n\to 0)$,$B_n=B+\delta_n(\delta_n\to 0)$,则

$$\left|\sum_{k=n}^{m-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right|\leqslant M\sum_{k=n}^{m-1}|a_k-a_{k+1}|\to 0\ (n\to\infty).$$

$$|a_mB_m-a_nB_n|=|(a+\varepsilon_m)(B+\delta_m)-(a+\varepsilon_n)(B+\delta_n)|$$

$$=|B(\varepsilon_m-\varepsilon_n)+a(\delta_m-\delta_n)+(\varepsilon_m\delta_m-\varepsilon_n\delta_n)|\to 0\ (n\to\infty).$$

根据 Cauchy 收敛原理,可知该级数收敛.

命题 9.12 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{m+n}(m=1,2,\cdots)$收敛.

证明 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{m+n}=\sum_{k=m}^{\infty}(k-m+1)a_k$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\left(1-\frac{m-1}{k}\right)ka_k,$$

且 $\left\{1-\dfrac{m-1}{k}\right\}_{k=m}^{+\infty}$ 是递增有界列,故根据 Abel 判别法即得所证.

(九) 关于级数乘积的一个结论

命题 9.13 (Mertens①) 设级数(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,其和为 S; (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,其和为 σ,则(A)与(B)的 Cauchy 乘积收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = S \cdot \sigma.$$

证明 记级数的部分和各为

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad \Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} C_k,$$

依题设有

$$S_n \to S, \ \sigma_n \to \sigma, \ S_n \sigma_n \to \sigma \cdot S, \ (n \to \infty).$$

我们的目的是证明

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = S \cdot \sigma.$$

(1) 由(A)的绝对收敛可知,存在 $M>0$,使得对一切 n 有

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant M.$$

又由(B)的收敛性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n>m\geqslant N$ 时,有

$$|\sigma_m - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

(2) 注意到

$$S_n \sigma_n = a_0 \sigma_n + a_1 \sigma_n + \cdots + a_n \sigma_n,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_n &= C_0 + C_1 + \cdots + C_n \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\
&= a_0 \sigma_n + a_1 \sigma_{n-1} + \cdots + a_n \sigma_0,
\end{aligned}$$

可知当 $n>m\geqslant N$ 时,有

$$\begin{aligned}
S_n \sigma_n - \Gamma_n &= a_1(\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \cdots + a_{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) \\
&\quad + a_{n+1-m}(\sigma_n - \sigma_{m-1}) + \cdots + a_n(\sigma_n - \sigma_0). \qquad ①
\end{aligned}$$

(3) 现在取定 $m=N$,从而在 $n>m=N$ 时,式①中前 $n-m$ 项有估计.

$$\begin{aligned}
&|a_1(\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \cdots + a_{n-m}(\sigma_n - \sigma_m)| \\
&< \frac{(|a_1| + \cdots + |a_{n-m}|)\varepsilon}{2M} \leqslant \frac{M\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

① 梅藤斯(1840~1927),德国数学家.

对于式①中后 N 项,注意到 N 是固定的,而级数(A)收敛,故有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1-N}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2-N}=\cdots=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

又考虑到 $\sigma_n\to\sigma\ (n\to\infty)$,我们有

$$\lim_{n\to\infty}|a_{n+1-N}(\sigma_n-\sigma_{N-1})+\cdots+a_n(\sigma_n-\sigma_0)|=0.$$

这样,对式①取极限,可知

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |S_n\sigma_n-\Gamma_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

因为 ε 是任取的,所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ |S_n\sigma_n-\Gamma_n|=0,\quad \lim_{n\to\infty}|S_n\sigma_n-\Gamma_n|=0.$$

最后,根据等式

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n=\lim_{n\to\infty}S_n\sigma_n-\lim_{n\to\infty}(S_n\sigma_n-\Gamma_n)=S\sigma,$$

即得所证.

注 1. 还有一种乘积方式叫做 Dirichlet 乘积,它在数论中有着特殊的重要性. 设 $a_0=b_0=0$,则 Dirichlet 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 中的项 C_n 为

$$C_n=\sum_{\frac{d}{n}}a_d b_{\frac{d}{n}}\quad (n=1,2,\cdots).$$

这里,符号 $\sum\limits_{\frac{d}{n}}$ 是指对 n 的一切正因子求和(包括 1 和 n). 例如 $C_6=a_1b_6+a_2b_3+a_3b_2+a_6b_1$, $C_7=a_1b_7+a_7b_1$,且也有与 Mertens 定理类似的结果.

2. 关于级数的 Cauchy 乘级,还有 Abel 的一个结果.(它不需要假定原级数绝对收敛,见幂级数的内容)

(十) 关于级数重排

下述结果在理论上有重要意义:

命题 9.14(Riemann) 若(A): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是条件收敛级数,则从(A)可适当地作出一个重排级数(B),使其出现下述情形之一:

(1) (B)收敛到任意指定的数 σ; (2) (B)发散到$+\infty$; (3) (B)发散到$-\infty$; (4) (B)在有限范围内跳动地取值,或在无界范围内跳动地取值.

由于 Riemann 定理这一结果,故称非绝对收敛的收敛级数为条件收

敛级数. Riemann 定理的证明可参阅:

(1) Apostol, T, M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.

(2) Fulks, W., *Advanced Calculas*, 3rd ed., Wiley, New York, 1978.

下例也是 Riemann 定理的一个示范:

例 改变条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 的求和顺序为

$$1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

则新级数发散至无穷.

证明 易知新级数之通项为 $b_n=\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-3}-\frac{1}{2^n}$.

从而当 $n\geqslant4$ 时有

$$b_n>2^{n-1}\frac{1}{2^{n+1}-3}-\frac{1}{2n}>\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}.$$

由此可知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=+\infty$.

(十一) $\{a_n\}$ 的收敛指标

定义设 $\{a_n\}$ 是递增趋于 $+\infty$ 的正数列. 若存在 $\lambda>0$, 使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-\alpha}\begin{cases}\text{收敛}, \alpha>\lambda,\\ \text{发散}, \alpha<\lambda,\end{cases}$$

则称 λ 为 $\{a_n\}$ 的收敛指标.

易知极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln a_n}=l\ (\text{若存在})$$

是 $\{a_n\}$ 的收敛指标.

第十章 函数项级数

设有一列函数

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots, \quad ①$$

它们都在某个区间 I 上有定义,我们称其为**函数列**,并记为 $\{f_n(x)\}$,而称

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \quad ②$$

为**函数项级数**. 也就是说式①与②中的每一项都是函数. 当我们取定一个 $x_0 \in I$ 时,则

$$\{f_n(x_0)\}: f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots$$

还原为(常)数列了,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 则是数值级数.

显然,若取定另一个点 $x_1 \in I$,则 $\{f_n(x_1)\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_1)$ 又成为另一个数列和数值级数了. 如此说来,数列与数值级数是这里的一种特殊情形. 从这个意义上讲,学习数列和数值级数为进一步研究函数列和函数项级数提供了必要的基础.

若 $\{f_n(x_0)\}$ 是收敛数列,则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在点 $x_0 \in I$ 处收敛;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛,则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在点 $x_0 \in I$ 处收敛. 若 $\{f_n(x)\}$ 在每一点 $x \in I$ 处都收敛,则称 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上收敛;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在每一点 $x \in I$ 处都收敛,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上收敛. 易知此时它们的极限是一个定义在

I 上的函数,常记为

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x),\quad x\in I.$$

也就是说,它们在区间 I 上是点点收敛的. 此时,称 I 为 $\{f_n(x)\}$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的收敛域. 如果在定义区域 X 上考察函数列 $\{f_n(x)\}$,当 $f_n(x)$ 在 X 的一部分区域 Y 上(点)收敛,那么也称 Y 为 $f_n(x)$ 的收敛域. 对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 也有类似的说法.

例 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ 的收敛区域是 $(-1,1)$.

证明 设 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x^n}(n=1,2,\cdots)$,易知它们的公共定义区域为 $|x|\neq 1$.

(1) 对于 $(-1,1)$ 中的任一点 x_0,因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_0^{n+1}}{1-x_0^{n+1}}\frac{1-x_0^n}{x_0^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-x_0^n}{1-x_0^{n+1}}\right||x_0|=|x_0|<1,$$

所以根据比值判别法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_0^n}{1-x_0^n}$ 是绝对收敛的.

(2) 对于满足 $|x_0|>1$ 的任一点 x_0,因为

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_0)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_0^n}{1-x_0^n}\right|=1,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_0^n}{1-x_0^n}$ 是发散的.

综上所述,该级数的收敛区域为 $(-1,1)$.

既然如此,研究函数项级数(或序列)的收敛性还有什么特殊意义呢? 这可从下述意义上来理解:当我们研究某个目标函数的性态,或它所描述的客观现象内涵的某种特定规律时,常常需要或尽可能用一列具有良好特性且有规则的函数组成的级数

来表达它,即把目标分解成一系列函数的和,或说展成函数项级数,转而希望通过考察其中每一函数项的性态及其运算,而达到对其和(极限)函数的认识.因此,我们的问题是:当函数列(或级数)中每个函数项都具有某种性质时,如有界、连续、可积及可微等,其极限(和)函数是否也具有相同性质且可通过各函数项的运算来表达?

正是为了解答这些问题,对函数列以及函数项级数来说,仅有点收敛的概念是不够的.为此,请看下面的例证:

例2 在$(-1,1)$上,几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

点收敛到函数$S(x)=(1-x)^{-1}$.显然,级数中每一项$x^n(n=1,2,\cdots)$在$(1,-1)$上都是有界的,但和函数$S(x)$在$(-1,1)$上是无界的.

例3 设有定义在$(-\infty,\infty)$上的函数列

$$f_n(x)=\frac{x^{2n}}{(1+x^{2n})} \quad (n=1,2,\cdots).$$

易知每个$f_n(x)$都是$(-\infty,\infty)$上的连续函数,且点收敛到

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\left\{\begin{matrix} 0, & |x|<1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1, \\ 1, & |x|>1 \end{matrix}\right\}=f(x).$$

显然,极限函数$f(x)$在$x=1,-1$处是不连续的.

例4 设有定义在$[0,1]$上的函数列

$$f_n(x)=n^2x(1-x)^n \quad (n=1,2,\cdots).$$

易知其点收敛的极限为

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=0, \quad x\in[0,1].$$

虽然每个$f_n(x)$与$f(x)$均在$[0,1]$可积,但是,由于

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n^2\int_0^1 x(1-x)^n\mathrm{d}x = n^2\int_0^1 (1-t)t^n\mathrm{d}t$$

$$=\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2}{n+2}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

故可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1\neq 0=\int_0^1 \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

这就是说，极限函数$f(x)$的积分不等于函数列的积分的极限，即极限运算与积分运算的次序是不能交换的.

例5 设有定义在$(-\infty,\infty)$上的函数列

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\quad (n=1,2,\cdots).$$

易知每个$f_n(x)$皆是可微函数，且

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,\ x\in(-\infty,\infty)\quad (n=1,2,\cdots).$$

由于对每一点 $x\in(-\infty,\infty)$，$f_n(x)\to f(x)=0\ (n\to\infty)$，故$f(x)$也可微. 但我们有

$$f'(0)=0,\ f_n'(0)=\sqrt{n}\to\infty\ (n\to\infty).$$

这说明极限函数的求导运算不能通过$f_n(x)$的求导运算经极限而获得.

由此可见，点收敛的方式不能保证函数列的许多重要性质可直接传递到其极限函数上. 其原因可大致理解如下：例如考察函数列连续性的传递问题，设$f_n\in C([a,b])\ (n=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in[a,b].$$

对于 $x_0\in(a,b)$，关于$f(x)$是否在点 $x=x_0$ 处连续的问题，根据连续函数的定义，它是与$f(x)$在点 $x=x_0$ 处的邻域$U(x_0)$上的值的态势有着密切的关系. 然而，对于 $U(x_0)$中的点 $x'\neq x_0$，虽然仍有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x')=f(x'),$$

但它与点 $x=x_0$ 上的极限

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$$

并没有直接的联系. 也就是说$f_n(x)$在点 $x=x_0$ 与 $x=x_1$ 两处

的收敛性是相互独立的，不能期望仅靠$f_n(x)$的连续性来使它在点 $x=x_0$ 和 $x=x'$ 处的收敛性同时受到约束，而导致极限函数$f(x)$在点 $x=x_0$ 附近的点上的值的态势也完全限定. 因此，必须补充其他条件或寻求另外的收敛方式，才能解决这一任务. 这就引发出一个十分重要的概念：一致收敛.

顺便指出，函数列$\{f_n(x)\}$与函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 虽然形式不同，但它们是可以互相转化的：若增添 $f_0(x)\equiv 0$，则有公式

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[f_k(x)-f_{k-1}(x)\right]\quad(n=1,2,\cdots).$$

从而函数列的收敛问题就可转化为级数的收敛问题；而级数的收敛本身就定义为其部分和(函数列)

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

的极限问题.

思考练习 试证明下列命题：

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{5+(-1)^n}{2\ln(x^2+1)}\right]^{-n}$ 在 $|x|<\sqrt{e^2-1}$ 时收敛.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$ 的收敛区域是 $x<0$ 以及 $x\geqslant 6$.

§ 1 函数项级数一致收敛的概念

为了加深对点收敛与下面介绍的一致收敛概念的不同认识，让我们重复前者的定义.

设函数列$\{f_n(x)\}$与函数$f(x)$在区间 I 上有定义，点 x 是 I 中取定的一点. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(x,\varepsilon)$(与 x,ε 均有关)，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称$f_n(x)$在点 x 处收敛且收敛于$f(x)$. 若$f_n(x)$在 I 中的每一点 x 上均收敛于$f(x)$,则说$f_n(x)$在 I 上收敛于$f(x)$. 这里,其收敛定义中存在的 N 是按不同的点而取的,是不一定相同的. 现在看一致收敛的定义:

定义 10.1 设$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在区间 I 上有定义.

(1) 若有定义在 I 上的函数$f(x)$,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N(仅与 ε 有关),使得当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in I$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \qquad ①$$

则称$f_n(x)$在区间 I 上是**一致收敛**①的,且一致收敛于$f(x)$(极限函数).

(2) 若有定义在 I 上的函数 $S(x)$,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N(仅与 ε 有关),使得当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in I$ 有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,\ S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x), \qquad ②$$

则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在区间 I 上是一致收敛的,且一致收敛于 $S(x)$(和函数).

比较点收敛与一致收敛的定义可立即看出,若$f_n(x)$在区间 I 上一致收敛,则$f_n(x)$在 I 中的每一点上均收敛,且其区别在于:在一致收敛定义中,其存在之 N 对一切 $x\in I$ 都管用,即当 $n\geqslant N$ 时,式①对一切 $x\in I$ 均成立.

形象地说,只要 $n\geqslant N$,不论 x 是区间 I 中的哪一点,$f_n(x)$在逼近$f(x)$时是"同步"的. 假定 $I=[a,b]$,$y=f(x)$与 $y=f_n(x)$($y=S(x)$与 $y=S_n(x)$)的曲线如图 10-1 所示,以$f(x)$($S(x)$)为中心曲线,作$f(x)+\varepsilon$, $f(x)-\varepsilon$ 两条虚曲线. 所谓$f_n(x)$在区间 I 上一致收敛于$f(x)$,意指对任意给定的宽为 2ε 的"带域"(两条虚线所围的区域),当指标 n 充分大($\geqslant N$)时,整

① 一致收敛也称均匀收敛.

个区间 I 上的曲线 $f_n(x)$ 落在此"带域"内.

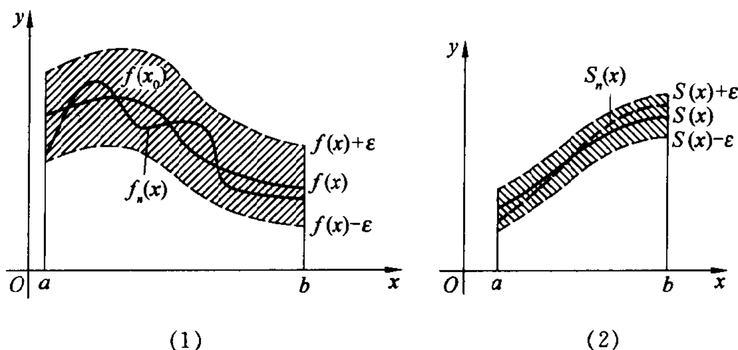


图 10-1

例 1 设 $f\in C^{(1)}((-\infty,\infty))$,令

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]\quad(n=1,2,\cdots),$$

则在任给的区间 $[a,b]$ 上,$f_n(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$.

证明 由微分中值定理知,对 $x\in[a,b+1]$ 有

$$f_n(x)=n\cdot f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right),\ 0<\theta<1.$$

由此知其点状收敛为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f'(x),\ x\in[a,b]$.

注意到 $f'(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上一致连续,故对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,对 $[a,b]$ 中所有的 x,有 $\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon$. 从而对 $[a,b]$ 中所有的 x,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

这说明 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f'(x)$.

例 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}$ 在 $[1,\infty)$ 上一致收敛.

证明 (1) 记该级数的部分和为 S_n,则对 $x\in[1,\infty)$ 有

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{1+(k-1)x}-\frac{1}{1+kx}\right]=1-\frac{1}{1+nx}\to 0\ (n\to\infty).$$

这说明该级数点收敛到 $S(x)=1\ (1\leqslant x<\infty)$.

(2) 由于对一切 $x\in[1,\infty)$,有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{1+nx}<\frac{1}{1+n}\to 0\ (n\to\infty).$$

故结论成立.

注 与数值级数类似,对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在 I 上的一致收敛问题,如果记 $R_n(x)=\sum_{n+1}^{\infty} f_k(x)$,那么它等价于$R_n(x)$在 I 上一致收敛于 0.

例3 考察在$[0,\infty)$上级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$的一致收敛性.

证明 (1) 易知这是一个交错级数,且对任意的 $x\in[0,\infty)$,$|f_n(x)|=\frac{1}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}$是随 n 增大而单调趋于 0 的. 根据 Leibniz 判别法,级数是收敛的.

(2) 由交错级数的余项估计,可得

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+\sqrt{x}}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

从而可知该级数在$[0,\infty)$上一致收敛.

思考练习 解答下列问题:

1. 若$f_n(x)$在区间 I_1 以及 I_2 上一致收敛,试证明$f_n(x)$在 $I_1\cup I_2$ 上也一致收敛.

2. 若$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,$a<c<b$,试证明 $f_n(x)$在$[a,c]$上也一致收敛.

3. 设$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)>0,x\in[a,b]$,试问是否对任意的 $x\in[a,b]$,均存在 N,使得$f_n(x)>0,(n>N)$.

4. 设$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛于正值函数$f(x)$,试问是否存在 N,使得 $n>N$ 时,有$f_n(x)>0\ (a<x<b)$. (提示:$f_n(x)$

$$=\frac{n}{n+1}\arctan x-\frac{\pi}{4}\Big)$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，试证明函数列 $f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

6. 设 $f\in C((-\infty,\infty))$,令

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

试证明$f_n(x)$在区间$[0,1]$上一致收敛于$\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$.

7. 设$f_n(x)$在 I 上一致收敛于$f(x)$,又$|g(x)|\leqslant M,x\in I$,试证明 $h_n(x)=g(x)f_n(x)$在 I 上一致收敛于 $h(x)=g(x)\cdot f(x)$.

8. 设 $f_n\in C([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于正值$f(x)$. 试证明存在 N,使得

$$f_n(x)>0\ (n>N,a\leqslant x\leqslant b).$$

§ 2 一致收敛函数项级数的运算性质

类似于点收敛级数的情形,下列有关一致收敛级数的运算性质,也有助于我们简化函数项级数一致收敛性的研讨.

定理 10.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$,在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$,$\sigma(x)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x)+g_n(x)]$在 I 上一致收敛于 $S(x)+\sigma(x)$.

证明 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$,$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)$,由题设可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ |\sigma_n(x)-\sigma(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ x\in I.$$

从而可知当 $n \geqslant N$ 时,对一切 $x \in I$ 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[f_k(x)+g_k(x)]-[S(x)+\sigma(x)]\right|$$

$$\leqslant |S_n(x)-S(x)|+|\sigma_n(x)-\sigma(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

此即说明 $\sum_{k=1}^{n}[f_k(x)+g_k(x)]$ 在 I 上一致收敛于 $[S(x)+\sigma(x)]$.

定理 10.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$,则对常数 c, $\sum_{n=1}^{\infty} c f_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $c \cdot S(x)$.

证明 略.

关于一致收敛的函数列,也有相应的性质,这里不再陈述.

定理 10.3 设 $f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$, $g_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $g(x)$,又有正数 M,使得

$$|f_n(x)| \leqslant M, |g_n(x)| \leqslant M \quad (n=1,2,\cdots,x \in I)$$

则 $h_n(x)=f_n(x)g_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $h(x)=f(x) \cdot g(x)$.

证明 易知 $|g(x)| \leqslant M\ (x \in I)$. 由题设,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,对 $n \geqslant N$ 以及 $x \in I$,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}, |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

从而对一切 $x \in I$ 以及 $n \geqslant N$,我们有

$$|h_n(x)-h(x)|=|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|$$

$$\leqslant |f_n(x)||g_n(x)-g(x)|+|g(x)||f_n(x)-f(x)|$$

$$\leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon,$$

即得所证.

注 两个一致收敛的函数列其乘积不一定能保持一致收敛性. 见本章注记.

定理 10.4 设 $f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$,且

$|f_n(x)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots;x\in I)$. 若 $g\in C([-M,M])$,则 $g[f_n(x)]$在 I 上一致收敛于 $g[f(x)]$.

证明 易知$|f(x)|\leqslant M\ (x\in I)$. 由题设,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|g(u_1)-g(u_2)|<\varepsilon,(-M\leqslant u_1,u_2\leqslant M,|u_1-u_2|<\delta).$$

因为对此 $\delta>0$,存在 N,使得

$$|f_n(x)-f(x)|<\delta,(n\geqslant N,x\in I).$$

所以$|g(f_n(x))-g(f(x))|<\varepsilon,(n\geqslant N,x\in I)$.

例 设 $g\in C([0,1])$,且 $g(1)=0$,则$f_n(x)=g(x)x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛于$f(x)=0,x\in[0,1]$.

证明 由 $g(1)=0$ 可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|g(x)|<\varepsilon,\ x\in[1-\delta,1].$$

由 $g\in C([0,1])$,可假定$|g(x)|\leqslant M,x\in[0,1]$.

从而在$[0,1-\delta]$上,由

$$|f_n(x)|=|g(x)x^n|\leqslant M(1-\delta)^n\to 0\ (n\to\infty)$$

可知,$f_n(x)$在$[0,1-\delta]$上一致收敛于$f(x)$.

又在$[1-\delta,1]$上,由$|f_n(x)|=|g(x)x^n|\leqslant|g(x)|<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$可知,$f_n(x)$在$[1-\delta,1]$上一致收敛于$f(x)$. 即得所证.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在区间 I 上一致收敛,$g(x)$在 I 上是有界的,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)g(x)$在 I 上一致收敛.

2. 设定义在区间 I 上的$\{g_n(x)\},\{f_n(x)\},\{h_n(x)\}$满足关系:

(1) $g_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant h_n(x)\ (n=1,2,\cdots,x\in I)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=f(x),\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=f(x)\ (x\in I)$. 则 $f_n(x)$一致收敛到$f(x)$.

3. 设定义在$(a,b]$上的$\{f_n(x)\},f(x)$和 $g(x)$满足关系式:

$\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0,|g(x)|\leqslant M,|f_n(x)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$,

且对任意的 $h>0$,$f_n(x)$在$[a+h,b]$上一致收敛于$f(x)$,则

$g(x)f_n(x)$在$(a,b]$上一致收敛于$g(x)f(x)$.(提示:注意$|f(x)|\leqslant M$,分别在$(a,a+\delta)$与$[a+\delta,b]$上考察$|g(x)f_n(x)-g(x)f(x)|$)

4. 设在区间 I 上,$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$,$g_n(x)$一致收敛于 $g(x)$,且有

$$|f_n(x)|\leqslant M_n,\ |g_n(x)|\leqslant N_n\ (x\in I, n=1,2,\cdots)$$

则$f_n(x)g_n(x)$在 I 上一致收敛于 $f(x)g(x)$.

§ 3 函数项级数一致收敛的判别法

3.1 Cauchy 准则

一致收敛的定义仍然是以极限形式的语言给出的,因此也有相应的 Cauchy 收敛准则,它与一致收敛的说法是等价的,其特点也是不需借助于外部(极限函数),而可根据函数列(或函数项级数)本身来判别其一致收敛性.

定理 10.5(函数列一致收敛的 Cauchy 准则) $\{f_n(x)\}$在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是:对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in I$ 以及一切正整数 p 都有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \qquad ①$$

证明 必要性. 假定$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$,根据定义可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in I$,以及一切正整数 p 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此立即得出,对所有的 $x\in I$,有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad n>N;p\in\mathbf{N}^*.$$

充分性. 假设条件①成立,则对每一切 $x\in I$,均有$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon\ (n\geqslant N;\ p\in\mathbf{N}^*)$. 从由点状收敛的 Cauchy 准则可知,存在定义在 I 上的函数$f(x)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in I.$$

现在对任给 $\varepsilon>0$,已知存在 N,使①成立. 在①中取定 n,且令 $p\to\infty$,可得

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.\ n\geqslant N,x\in I.$$

这说明 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$.

定理 10.6(函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是:对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in I$ 以及正整数 p 都有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x)\right|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

证明 略.

注意,由于上述 Cauchy 准则是一致收敛的充分必要条件,故也可用于判断不一致收敛性. 即若存在 $\varepsilon_0>0$,对任意的 N,均存在 $n_0>N$,自然数 p_0 以及 $x_0\in I$,使得

$$(1)\ |f_{n_0+p_0}(x_0)-f_{n_0}(x_0)|\geqslant\varepsilon_0;(2)\ \left|\sum_{n_0+1}^{n_0+p_0} f_k(x_0)\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则在(1),$f_n(x)$在 I 上不一致收敛;在(2),级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

特别地,若存在 $\varepsilon_0>0$,存在 N_0,对任意的 $n>N_0$,存在 p 与 $x_n\in I$,使得

$$(1)\ |f_{n+p}(x_n)-f_n(x_n)|\geqslant\varepsilon_0;(2)\ \left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x_n)\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则在(1)$f_n(x)$在 I 上不一致收敛;在(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在 I 上不一致收敛.

推论 10.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,则通项 $f_n(x)$在 I 上一致收敛于零.

证明 由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,对一切

$x\in I$ 均有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<\varepsilon,\ P\in\mathbf{N}^*$.

取 $p=1$,则可得 $|f_{n+1}(x)|<\varepsilon,\ n\geqslant N, x\in I$. 即得所证.

注 推论 10.1 表明的是级数一致收敛必须具备的条件,并非充分条件.

推论 10.2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 I 上绝对一致收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 在区间 I 上一致收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 对任给 $\varepsilon>0$,由题设可知,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in I$ 以及正整数 p 都有

$$\sum_{n+1}^{n+p} |f_k(x)|<\varepsilon.$$

从而由不等式

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x)\right|\leqslant \sum_{n+1}^{n+p} |f_k(x)|<\varepsilon,\ n\geqslant N, x\in I, p\in\mathbf{N}^*.$$

即得所证.

例 1 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(kx)-\cos(k+1)x}{k}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是一致收敛的.

证明 注意不等式 $\left(S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx-\cos(k+1)x}{k}\right)$

$$\begin{aligned}|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=&\left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}\right.\\&+\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}+\cdots\\&\left.+\frac{\cos(n+p)x-\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|\\=&\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)}\right.\end{aligned}$$

$$-\cdots-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\Bigg|$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n},$$

并应用 Cauchy 一致收敛原理,即得所证.

例 2 在$[0,1]$上级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$不是一致收敛的.

证明 令$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$,则只需注意不等式

$$\sum_{k=n+1}^{2n}f_k\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+\left(\frac{2n}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{n}n\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

即可.

例 3 在$[1,\infty)$上函数列$f_n(x)=\arctan\left(\frac{n}{x^2}\right)$, $(n=1,2,\cdots)$不一致收敛.

证明 在$[1,\infty)$内取点列 $x_n=\sqrt{n}(n=1,2,\cdots)$,以及 $n+p=2n$,则

$$|f_{n+p}(x_n)-f_n(x_n)|=|\arctan2-\arctan1|.$$

由此可知,当 $\varepsilon=\left|\arctan2-\frac{\pi}{4}\right|$时,对任意大的 n,不可能对所有$[1,\infty)$中的 x,皆有$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. 即得所证.

例 4 设 $f\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$,且满足

$$|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)|<\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots,x\in(-\infty,\infty)),$$

则有$\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=ce^x$, $x\in(-\infty,\infty)$.

证明 记$g_n(x)=f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$,则由

$$|g_{n+p}(x)-g_{n+1}(x)|=\left|\sum_{n+2}^{n+p}[g_k(x)-g_{k-1}(x)]\right|$$

$$\leqslant\sum_{n-2}^{n+p}|f^{(k)}(x)-f^{(k-1)}(x)|\leqslant\sum_{n+2}^{n+p}\frac{1}{k^2},x\in(-\infty,\infty)$$

可知,$g_n(x)=f^{(n)}(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致收敛. 记其极限函数为$g(x)$. 则 $f^{(n)}(x)\to g(x)$, $f^{(n+1)}(x)\to g(x)$, $(n\to\infty)$. 从而由

$$f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)=\int_0^x f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

即得$g'(x)=g(x)$,即$g(x)=c\mathrm{e}^x$, $x\in(-\infty,\infty)$.

注 当讨论一个函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$(a,b)$上是否一致收敛时,在许多情况下,其要害往往在端点 $x=a$、b 处的附近. 因此,为判别该级数不是一致收敛的,常可用下述方法从必要条件入手. 如在 $x=a$ 附近.

(1) 若存在常数 $C>0$,对充分大的 n,有

$$\lim_{x\to a+}|f_n(x)|=l_n\geqslant C;$$

则级数在$(a,a+\delta)$不一致收敛.

(2) 若对$(a,a+\delta)$中满足 $x_n\to a$ $(n\to\infty)$的数列$\{x_n\}$,有

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)|=l>0,$$

则级数在$(a,a+\delta)$上不一致收敛.

例如,在$(0,1)$上级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^3x^3}$是不一致收敛的.

推论 10.3 设 $f_n\in C([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛,则必在$[a,b]$上一致收敛.

证明 由题设知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in(a,b)$以及正整数 p 都有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}f_k(x)\right|<\varepsilon.$$

现在令 $x\to a+$, $x\to b-$,注意到每个 $f_n\in C([a,b])$,可知

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}f_k(a)\right|\leqslant\varepsilon,\quad\left|\sum_{n+1}^{n+p}f_k(b)\right|\leqslant\varepsilon.$$

这说明当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$以及正整数 p 均有

$$\left|\sum_{n=1}^{n+p} f_k(x)\right|\leqslant\varepsilon,$$

即得所证.

上述结论告诉我们,对于在区间上的连续函数列或所组成的级数,其一致收敛区域总是闭区间. 这一特征为判别非一致收敛性提供了方便.

例 5 在$(1,+\infty)$上级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$是不一致收敛的.

证明 因为每个$f_n(x)=\frac{1}{n^x}$在$[1,\infty)$上连续,而在 $x=1$ 处,该级数并不收敛. 所以它也就不可能在$(1,\infty)$上一致收敛.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列级数的一致收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^2\mathrm{e}^{-nx}\ (0<x<\infty)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\sin\frac{1}{3^n x}\ (0<x<\infty)$.

2. 设函数列$\{g_n(x)\},\{f_n(x)\},\{h_n(x)\}$满足

$$g_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant h_n(x)\ (n=1,2,\cdots;a\leqslant x\leqslant b),$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛.

3. 设$\{f_n(x)\}$在区间 I 上一致收敛于$f(x)$,且有$|f_n(x)|\leqslant M_n(n=1,2,\cdots;x\in I)$. 试证明存在 M,使得$|f_n(x)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$.

4. 判别下列函数在$[0,\pi]$上的一致收敛性:

(1) $\{\sqrt[n]{\sin x}\}$. (2) $\{(\sin x)^n\}$.

3.2 M(最值)判别法

函数列或函数项级数的一致收敛性,当然可以根据 Cauchy

准则来加以判别,不过在实用上,我们还可有一些由它导出的,在许多情况下使用更为方便的特定的判别法则.

(一) 函数列的情形

定理 10.7 设函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 上点收敛于$f(x)$,即$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $x\in I$.令

$$M_n=\sup_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}\quad (n=1,2,\cdots),$$

则$f_n(x)$在 I 上一致收敛于$f(x)$的充分必要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}M_n=0.$$

证明 必要性.若$f_n(x)$在 I 上一致收敛于$f(x)$,则对任给$\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,x\in I$.由此可知

$$M_n=\sup_{x\in I}\{|f_n(x)-f(x)|\}\leqslant\varepsilon,(n\geqslant N).$$

这说明 $M_n\to0\ (n\to\infty)$.

充分性.若 $M_n\to0\ (n\to\infty)$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得$M_n<\varepsilon,n\geqslant N$.

显然,对一切 $x\in I$,当 $n\geqslant N$ 时有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.这说明$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

例 1 在$(-\infty,\infty)$上,函数列$f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}\quad (n=1,2,\cdots)$是一致收敛的.

证明 (1) 首先看点收敛,易知有$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+nx^2}=0$,$x\in(-\infty,\infty)$.

(2) 其次,计算 M_n:由等式

$$M_n=\sup_{(-\infty,\infty)}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup_{(-\infty,\infty)}\left\{\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|\right\},$$

并注意到函数$\left|\dfrac{x}{1+nx^2}\right|$在 $x\to+\infty$或$-\infty$时趋于零,可知其上确界就是函数$\dfrac{x}{1+nx^2}$在正半轴上的最大值.用导数求极值法,

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}=0$$

可知,在 $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$处它达到最大值$\frac{1}{2\sqrt{n}}$,且 $M_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0\ (n\to\infty)$. 即得所证.

例 2 在$[0,b](b>0)$上,函数列$f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-nx}$, $(n=1,2,\cdots)$不是一致收敛的.

证明 (1) 因为我们有

$$0\leqslant f_n(x)=\frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}\leqslant\frac{nx}{\frac{n^2x^2}{2}}=\frac{2}{nx},\quad x\in(0,b],$$

所以其点收敛情形为$(f_n(0)=0)$

$$0\leqslant f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx}=0,\quad x\in(0,b].$$

(2) 当 n 充分大时,在点 $x=\frac{1}{n}\in[0,b]$处,函数 $nx\mathrm{e}^{-nx}$ 取最大值 e^{-1}. 从而有

$$M_n=\sup_{[0,b]}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup_{[0,b]}\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}=\mathrm{e}^{-1}.$$

由此知当 $n\to\infty$时 M_n 不趋于零. 即得所证.

注 为了阐明

$$\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0,$$

不一定非要求出 M_n,实际上只需找到数列$\{A_n\}$,使得 $A_n\to 0\ (n\to\infty)$,且满足

$$M_n\leqslant A_n\quad(n\geqslant n_0)$$

即可. 为此直接放大$|f_n(x)-f(x)|$,使它不超过 A_n(与 x 无关)即可.

例 3 在$[1,\infty)$上函数列$f_n(x)=n\sin\frac{1}{nx}\quad(n=1,2,\cdots)$是一致收敛的.

证明 (1) 易知其点极限为$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{nx}=\dfrac{1}{x}$, $x\in[1,\infty)$.

(2) 应用不等式$|\sin t-t|\leqslant\dfrac{t^2}{2}$,我们有

$$\left|n\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{x}\right|=n\left|\sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{nx}\right|\leqslant\frac{n}{2}\frac{1}{(nx)^2}=\frac{1}{2nx^2}\leqslant\frac{1}{2n}.$$

即得所证.

(二) 函数项级数的情形

定理 10.8(Weierstrass M-判别法) 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在区间$I$上是绝对一致收敛的$\left(\text{即}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\text{在} I \text{上一致收敛}\right)$,如果存在正项收敛数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$,使得对一切$x\in I$,有

$$|f_n(x)|\leqslant M_n\ (x\in I;n=1,2,\cdots).$$

证明 依题设知,对任给$\varepsilon>0$,存在N,使得

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}M_k\right|<\varepsilon,\ (n\geqslant N\ \text{以及一切正整数}\ p).$$

由此可知对一切$x\in I$以及一切正整数p,都有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}f_k(x)\right|\leqslant\sum_{n+1}^{n+p}|f_k(x)|\leqslant\sum_{n+1}^{n+p}M_n<\varepsilon,\ n\geqslant N.$$

即得所证.

例 4 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛,则在$(-\infty,\infty)$上,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{1+x^{2n}}$绝对一致收敛.

证明 只需注意到不等式$\left|\dfrac{a_nx^n}{1+x^{2n}}\right|\leqslant|a_n|$即可.

例 5 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+n^qx^2}\quad(p,q>0)$$

在$[a,b]$上的一致收敛性.

解 (1) $p>1$时,我们有

$$\left|\frac{x}{n^p+n^q x^2}\right|\leqslant\frac{\alpha}{n^p},\quad \alpha=\max(|a|,|b|).$$

因此,该级数在$[a,b]$上绝对一致收敛.

(2) $0<p\leqslant 1$时,易知$|f_n(x)|$在$x^2=\frac{n^p}{n^q}$处达到最大值$\frac{1}{2n}^{\frac{p+q}{2}}$.由此可知级数在$p+q>2$时也绝对一致收敛.

例6 设在$(-\infty,\infty)$上$\{f_n(x)\}$,$f(x)$满足

(1) $|f_n(x)|\leqslant M_n(n=1,2,\cdots)$;

(2) $f_n(x)$一致收敛于$f(x)$.

则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}\{f_n(x)\}=\sup_{-\infty<x<\infty}\{f(x)\}.$$

证明 (1) 由题设知存在n_0,使得

$$|f(x)|\leqslant M_{n_0}+1=M\ (-\infty<x<\infty).$$

记$M_1=\sup\{f(x):-\infty<x<\infty\}$,则对任给$\varepsilon>0$,存在$x_\varepsilon\in(-\infty,\infty)$,使得$f(x_\varepsilon)>M_1-\varepsilon$.也存在$N$,使得

$$f_n(x_\varepsilon)>f(x_\varepsilon)-\varepsilon>M_1-2\varepsilon\ (n>N).$$

从而又有$\sup\{f_n(x):-\infty<x<\infty\}>M_1-2\varepsilon\ (n>N)$.由$\varepsilon$的任意性可知

$$\sup\{f_n(x):-\infty<x<\infty\}\geqslant M_1;\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{(-\infty,\infty)}\{f_n(x)\}\geqslant M_1.$$

(2) 对任给$\varepsilon>0$,存在N,使得

$$f_n(x)<f(x)+\varepsilon\leqslant M_1+\varepsilon\ (n>N,-\infty<x<\infty).$$

从而有$\sup_{(-\infty,\infty)}\{f_n(x)\}\leqslant M_1+\varepsilon\ (n>N)$.因此又有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{(-\infty,\infty)}\{f_n(x)\}\leqslant M_1.$$

即得所证.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列函数列$\{f_n(x)\}$的一致收敛性:

(1) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$,[0,1]. (2) $f_n(x)=\dfrac{n^2}{n^2+x^2}$,[0,1].

(3) $f_n(x)=\dfrac{x}{n+x}$,$[0,\infty)$. (4) $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$,[0,1].

2. 判别下列级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的一致收敛性,其中$f_n(x)$为

(1) $\dfrac{x\sin(nx)}{\sqrt{1+n^2}(1+nx^2)}$,$(-\infty,\infty)$.

(2) $\dfrac{2nx}{1+n^5x^2}$,$(-\infty,\infty)$. (3) $\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$,[0,2].

(4) $\dfrac{1}{(1+nx)^2}$,$(0,\infty)$.

(5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n+x^3}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{nx}}\cdot\arctan\sqrt{\dfrac{x}{n}}$,[0,2].

3. 试证明在[0,1]上函数列$\{x^n-x^{2n}\}$不一致收敛;$\{x^n-x^{n+1}\}$一致收敛.

4. 确定α的取值,使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\alpha}e^{-nx^2}$在$(0,\infty)$上一致收敛.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$是正项收敛级数,试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x-a_n}$在不含$a_n$的区间$[a,b]$上是绝对一致收敛的.($n>n_0$ 时有 $a_n>a_{n_0}>b$,再与$\dfrac{1}{a_n}\dfrac{a_n}{a_n-b}$比较.

6. 设$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数,且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(a)|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(b)|$$

收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上绝对一致收敛.

3.3 函数乘积项级数一致收敛的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

类似数项级数的情形,对于函数乘积项级数的一致收敛也

有 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

(一) Abel 判别法

定理 10.9 对于函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x),\ (x\in I),\tag{①}$$

若有

(1) $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致有界,且对每个固定的 $x\in I$, $\{a_n(x)\}$ 是非负递减数列;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

则级数①在 I 上一致收敛.

证明 由(1)不妨假定

$$0\leqslant a_n(x)\leqslant M,\ (x\in I,\ n=1,2,\cdots).$$

由(2)可知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{6M},\ (n\geqslant N,\ p\in \mathbf{N}^*;x\in I).$$

从而应用 Abel 引理(见第九章第 4.4 节),当 $n\geqslant N$ 时,对一切正整数 p 可得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{6M}\cdot 3M=\varepsilon,\ x\in I.$$

根据 Cauchy(一致收敛)准则,即得所证.

下述推论表明,数列 $\{a_n(x)\}$ 非负递减的条件是可以改进的.

推论 10.4(Abel 判别法) 对于函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x),(x\in I),\tag{②}$$

若有

(1) $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致有界,且对每个固定的 $x\in I$, $\{a_n(x)\}$ 是递增(或递减)数列;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$在 I 上一致收敛，则级数②在 I 上一致收敛.

证明 按$\{a_n(x)\}$递增性作新函数列$\{c_n(x)\}$:

$$c_n(x)=a(x)-a_n(x),\ \ (a(x)=\lim_{n\to\infty}a_n(x)),$$

易知$\{c_n(x)\}$是非负递减列. 根据上述定理可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)b_n(x)$在 I 上一致收敛.

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的一致收敛性，以及极限函数 $a(x)$的有界性，可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(x)b_n(x)$$

在 I 上是一致收敛的. 由此立即得出级数②的一致收敛性.

例 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$在$[0,1]$上一致收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是一致收敛的，而 x^n 在$[0,1]$上是一致有界且非负递减的，所以由 Abel 判别法知结论成立.

例 2 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

在$[0,\infty)$上一致收敛.

证明 因为对每个 $x\in[0,\infty)$，$\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$是非负递减数列，且有

$$0\leqslant\frac{1}{n^x}\leqslant 1,\ \ (x\in[0,\infty)).$$

又注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一致收敛性，由 Abel 判别法即得所证.

例 3 考察在$(-\infty,\infty)$上级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}\arctan nx$$

的一致收敛性.

解 易知对每个固定的 $x\in(-\infty,\infty)$, $\{\arctan nx\}$ 是单调数列,且一致有界.又因为

$$\frac{1}{n+x^2}\leqslant\frac{1}{n},\ (x\in(-\infty,\infty)),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛的.根据 Abel 判别法可知,该级数在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛.

(二) Dirichlet 判别法

定理 10.10(Dirichlet 判别法) 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x),\ (x\in I).\qquad ③$$

若有

(1) 对每个固定的 $x\in I$, $\{a_n(x)\}$ 是单调数列,且当 $n\to\infty$ 时,$a_n(x)$ 在 I 上一致收敛于零;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的前 n 项部分和一致有界:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant M,\ x\in[a,b],n\in\mathbf{N}^*,$$

则级数③在 I 上一致收敛.

证明 不妨假定 $a_n(x)$, $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是非负的,而且随 n 增大而递减(参阅推论 10.4).

由(1)知,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$0\leqslant a_n(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2M},\ (x\in I,n\geqslant N).$$

根据 Abel 引理,对 $n\geqslant N$ 以及一切正整数 p,均有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)b_k(x)\right|\leqslant a_{n+1}(x)\cdot\max_{i=1,2,\cdots,p}\left|\sum_{k=n+1}^{n+i}b_k(x)\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M=\varepsilon.$$

因此由 Cauchy(一致)收敛准则,即得所证.

例 4 在$[a,b]$上级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$$

是一致收敛的.(注意,对任意的 $x\in[a,b]$,该级数皆不绝对收敛)

证明 首先,级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ 的部分和在$[a,b]$上是一致有界的.其次,因为对每个 $x\in[a,b]$,$\frac{x^2+n}{n^2}$随 n 增大而递减,且有

$$\frac{x^2+n}{n^2}\leqslant\frac{M^2+n}{n^2}\to 0\ (n\to\infty),M=\max\{|a|,|b|\}.$$

从而根据 Dirichlet 判别法,即得所证.

例 5 设 $0<\delta<\pi$,则在$[\delta,2\pi-\delta]$上级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}\ (0<p\leqslant 1)$$

一致收敛.

证明 首先,$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$是递减趋于(一致)零的数列.其次,由不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\leqslant\csc\frac{\delta}{2},\ x\in[\delta,2\pi-\delta],$$

可知 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ 的部分和在$[\delta,2\pi-\delta]$上的一致有界性.根据 Dirichlet 判别法即得所证.

注 1. 一般来说,若数列$\{a_n\}$是单调趋于零的,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

在$[\delta,2\pi-\delta]$上是一致收敛的,其中 δ:$0<\delta<2\pi$.

2. 在$[0,\pi]$上,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

是不一致收敛的.

证明 令 $x_n=\frac{1}{2n}$,则有

$$0<kx_n\leqslant 1<\frac{\pi}{2}\quad (k=n+1,n+2,\cdots,2n).$$

因此,由于不等式

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{2}{\pi},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

故可得

$$\frac{\sin kx_n}{k}=\frac{\sin kx_n}{kx_n}x_n\geqslant\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n}=\frac{1}{n\pi}\ (k=n+1,\cdots,2n).$$

由此即知

$$\frac{\sin(n+1)x_n}{n+1}+\frac{\sin(n+2)x_n}{n+2}+\cdots+\frac{\sin 2nx_n}{2n}$$
$$>\frac{1}{n\pi}+\cdots+\frac{1}{n\pi}=\frac{1}{\pi}.$$

这样,对 $\varepsilon<\frac{1}{\pi}$,在$[0,\pi]$上,该级数不满足 Cauchy 一致收敛准则. 即得所证.

3. *虽然用类似于前例的方法可以证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上一致收敛,但不能用 Weierstrass M-判别法. 因为我们有

$$\max\left\{\left|\frac{\sin nx}{n}\right|:\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}\right\}=\frac{1}{n},$$

所以如果存在 $M_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,使得

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant M_n\quad x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right].$$

从而就有 $M_n\geqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,导致 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 发散.

思考练习 解答下列问题:

1. 判别下列级数的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(1+\frac{x}{n}\right),[0,1].$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\cdot\arctan(nx)}{n}$,$[1,2\pi-1]$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^n}{1+x^n}\left(\text{其中}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ 收敛}\right)$,$[0,1]$.

2. 判别下列级数的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$,$[0,\infty)$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(nx)}{n}$.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R>0$ 处收敛,试证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$[0,R]$上一致收敛.

§4　函数性质的传递——极限次序的交换

现在,我们来研究并解答本章初始提出的问题,即函数所具有的性质在无穷运算下是否能保持的问题.下面将看到这一问题的实质是:两种极限过程的先后次序是否可以交换的问题,而一致收敛性在其中扮演着关键的角色.为此,先给出关于函数列与级数的两个重要引理.

引理 10.1　设 $x_0\in I$(区间),$f_n(x)$在$\frac{I}{\{x_0\}}$上一致收敛于$f(x)$,若有

$$\lim_{x\to x_0}f_n(x)=a_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

则$\{a_n\}$是收敛列,且有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{n\to\infty}a_n\ \left(\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)\right).$$

证明　(1) 根据$f_n(x)$的一致收敛性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 n_0,使得当 $n>n_0$ 时,有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\left(p=1,2,\cdots;x\in\frac{I}{\{x_0\}}\right).$$

固定 n,p,令 $x\to x_0$,可得

$$|a_{n+p}-a_n|=|\lim_{x\to x_0}f_{n+p}(x)-\lim_{x\to x_0}f_n(x)|<\varepsilon.$$

这说明$\{a_n\}$是收敛列,不妨设为$a_n \to a$ $(n\to\infty)$.

(2) 根据$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$可知,对任给$\varepsilon>0$,存在N_1,当$n\geqslant N_1$时有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\left(x\in \frac{I}{\{x_0\}}\right).$$

类似地,又存在N_2,当$n\geqslant N_2$时,有$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3}$.

记$N=\max\{N_1,N_2\}$,则由$f_N(x)\to a_N(x\to x_0)$可知,对任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,

$$|f_N(x)-a_N|<\frac{\varepsilon}{3}(0<|x-x_0|<\delta \text{ 且 } x\in I).$$

因此,当$0<|x-x_0|<\delta$且$x\in I$时,我们有

$$|f(x)-a|\leqslant|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-a_N|+|a_N-a|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这就是说极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于$a$.

引理 10.2 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$I$(区间)上一致收敛于$S(x)$,$x_0\in I$.若有

$$\lim_{x\to x_0}f_n(x)=a_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且有

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\left(\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)\right)$$

证明 记$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A_n$,则依题设知,$S_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$,且有

$$\lim_{x\to x_0}S_n(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to x_0}f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k=A_n.$$

 从而根据引理 10.1 可知

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k,\ \lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

注意,引理 10.2 的陈述均在 $x_0\in I$ 上进行,实际上整个证明过程只需在 x_0 的某个邻域内满足条件即可.

4.1 连续性质的传递

(整序变量的极限与连续变量的极限次序的交换)

现在,我们可以给出结论:函数的连续性在一致收敛的方式下是可以传递的. 这实际上只是前述引理的一个特殊情形.

定理 10.11 设 $x_0\in I$, $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在 $x=x_0$ 处连续.

(1) 若$f_n(x)$在 I 上一致收敛于$f(x)$,则$f(x)$在 $x=x_0$ 处连续;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在 I 上一致收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

证明 (1) 联系到引理 10.2,我们有

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=f_n(x_0)\xlongequal{\text{def}}a_n(n=1,2,\cdots);\lim_{n\to\infty} a_n=f(x_0).$$

由此即得

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{n\to\infty} a_n=f(x_0).$$

(2) 联系到引理 10.2,我们有

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=f_n(x_0)\xlongequal{\text{def}}a_n;\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)=S(x_0).$$

由此即得$\lim\limits_{x\to x_0} S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=S(x_0)$.

推论 10.5 (1) 设$f_n(x)$在 I 上一致收敛于$f(x)$,若 $f_n\in C(I)(n=1,2,\cdots)$,则 $f\in C(I)$;

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,若$f_n\in C(I)$

$(n=1,2,\cdots)$,则 $S\in C(I)$.

注 1. 连续函数列在收敛但不一致收敛情形下,其极限函数也可能是连续的.换句话说,一致收敛条件只是使极限函数连续的充分条件.另一方面,如果连续函数列(或连续函数项级数)的极限函数(和函数)在区间 I 上不连续,那么其收敛在 I 上一定不是一致收敛.此一结论常可用于判别非一致收敛.例如

(1) 在$[0,1]$上连续函数列$f_n(x)=x^n$ 收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

且$f(x)$在$[0,1]$上不连续,故$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛于$f(x)$.

(2) 在$[0,1]$上连续函数列$f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ 收敛于连续函数$f(x)\equiv 0$,但$f_n(x)$在$[0,1]$上是不一致收敛的.

(3) 设在$[a,b]$上的连续函数列点收敛到连续函数$f(x)$.若有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$,则$f_n(x)$一致收敛到$f(x)$.(见章末注记)

(4) 在$[0,1]$上我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n=\begin{cases}1, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,0,\end{cases}$$

由于和函数在$[0,1]$上不连续,故级数在$[0,1]$上不一致收敛.

2. 上述定理的条件中,包含点 $x=x_0$ 的区间 I 实际上可以是任意一个点 $x=x_0$ 的邻域,这是因为函数的连续性是函数的局部属性.

3. 在今后学习的《实变函数》课程中,将会看到:当$[a,b]$上的连续函数列$f_n(x)$(点)收敛于$f(x)$时,极限函数$f(x)$的连续点必在$[a,b]$上稠密.(虽然不能具体指出在何处连续,且也可能会有很多不连续点)

例 1 考察在$(-1,1)$上函数项级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+x\right)^n$$

的连续性.

解 对任意的点 $x_0\in(-1,1)$,存在 $0<r<1$,使得 $x_0\in[-r,r]$,因此只需指出该级数在$[-r,r]$上是一致收敛的即可.

因为我们有

$$\left|\left(\frac{1}{n}+x\right)^n\right|\leqslant\left(\frac{1}{n}+|x|\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{n}+r\right)^n,\quad x\in[-r,r],$$

又注意到存在 N,当 $n>N$ 时有

$$\left(\frac{1}{n}+r\right)^n\leqslant q^n,0<q<1,$$

所以根据 Weierstrass-M 判别法,可知该级数在$[-r,r]$上一致收敛.

这说明 $S(x)$在点 $x=x_0$ 处连续,而由 $x_0\in(-1,1)$的任意性,即知 $S(x)$在$(-1,1)$上连续.

关于极限与求和次序的可交换,一致收敛只是一个充分条件. 下面给出另一形式的结果.

例 2 设在$[a,b)$上,每个$f_n(x)$($n\in\mathbf{N}^*$)都是非负递增函数,且在$[a,b)$上 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$收敛. 若存在 $M>0$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\leqslant M,\quad x\in[a,b),$$

则

$$\lim_{x\to b-}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b-).$$

证明 记 $S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\leqslant M$,易知 $\sum_{n=1}^{m}f_n(b-)\leqslant M$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}f(b-)$收敛. 又存在极限

$$\lim_{x\to b-}S(x)=\lim_{x\to b-}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x).$$

令 $f_n(b)=f_n(b-)$($n=1,2,\cdots$),则每个 $f_n(x)$的定义域都延拓到 3$[a,b]$上,且都在 $x=b$ 上连续,在$[a,b]$上递增. 因为我们有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}f_k(x)\right|\leqslant\left|\sum_{n+1}^{n+p}f_k(b)\right|,$$

以及 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b)$的收敛性,可知在$[a,b]$上

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

一致收敛. 由此即得所证.

定理 10.12 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点收敛于 $f \in C([a,b])$，则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是：对 $[a,b]$ 中任意的收敛点列 $x_n \to x_0 (n\to\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

证明 必要性. 由一致收敛性可知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1，使得

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} (n>N_1, a\leqslant x\leqslant b).$$

而根据 f 的连续性又知，存在 $N_2>N_1$，使得

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} (n>N_2).$$

从而我们有

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

充分性. 反证法. 假定 $f_n(x)$ 不一致收敛于 $f(x)$，就存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $x_{n_k}\in[a,b]$ $(k=1,2,\cdots)$，使得

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0. \quad ①$$

且不妨假定 $x_{n_k}\to x_0$（否则再抽子列）. 从 f 的连续性以及题设可知，存在 K，使得

$$|f(x_{n_k})-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}, |f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}. (k>K)$$

因此，我们有 $(k>K)$

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|$$
$$\leqslant|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_{n_k})|<\varepsilon_0.$$

这与式①矛盾.

思考练习 解答下列问题：

1. 判别下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^4}{(1+x^4)^n}$，$[0,1]$. (2) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n-1}}-x^{\frac{1}{2n-3}}\right)$，$[-1,1]$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x, (0,1]$. (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{n^2+x^2}, [-1,1]$.

$\left(\text{提示:(4)记通项为} \frac{n^2}{n^2+x^2}\left(\frac{x}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$

2. 求下列极限值:

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$. (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

3. 设 $f_n \in C([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,且一致收敛于 $f(x)\neq 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$,试证明

(1) 存在 N,当 $n>N$ 时有 $f_n(x)\neq 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

(2) $\left\{\frac{1}{f_n(x)}\right\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

4. 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续;且 $f_n(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致收敛于$f(x)$,则$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

5. 设 $f_n \in C((a,b))$ $(n=1,2,\cdots)$. 若有定义在(a,b)上的函数$f(x)$,使得对于(a,b)中的任一开区间(α,β),$f_n(x)$在(α,β)上一致收敛于$f(x)$,则 $f\in C((a,b))$.

4.2 积分性质的传递

(整序变量的极限与积分次序的交换)

定理 10.13 (1) 设$f_n\in R([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,若$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$,则 $f\in R([a,b])$,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(2)(逐项积分)设 $f_n \in R([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,则 $S\in R([a,b])$,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 首先,对任给 $\varepsilon>0$,由题设知,存在 N,使得对一

切 $x\in[a,b]$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)},n\geqslant N. \quad ①$$

特别有 $|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

取定 N,因为 $f_N\in R([a,b])$,所以存在 $[a,b]$ 的分划 $\Delta:a=x_1<x_2<\cdots<x_l=b$,使得

$$\sum_{i=1}^{l}M_i(f_N)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{l}m_i(f_N)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{l}w_i(f_N)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

化式①为

$$f_N(x)-\frac{\varepsilon}{3(b-a)}<f(x)<f_N(x)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

由此可知

$$\sum_{i=1}^{l}M_i(f)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{l}M_i(f_N)\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{3};$$

$$\sum_{i=1}^{l}m_i(f)\Delta x_i\geqslant\sum_{i=1}^{l}m_i(f_N)\Delta x_i-\frac{\varepsilon}{3}.$$

合并即得

$$\sum_{i=1}^{l}w_i(f)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{l}M_i(f)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{l}m_i(f)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{l}M_i(f_N)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{l}m_i(f_N)\Delta x_i+\frac{2\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这说明 $f\in R([a,b])$.

其次,再根据 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$ 可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

从而当 $n\geqslant N$ 时有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b[f_n(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

这说明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(2) 记$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$,则题设化为$S_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$. 由$f_k\in R([a,b])$,可知$S_n\in R([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$. 从而由(1)知$S\in R([a,b])$,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

此即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x.$$

注 1. 在上述定理的条件下易知,对任意的$x\in[a,b]$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\mathrm{d}t,$$

且这些收敛对$x\in[a,b]$是一致的.

2. 定理的逆不真,即可积函数列(级数)能收敛于可积函数,但不一定一致收敛. 另一方面,若可积函数列(级数)的极限函数不可积,或者虽然可积但积分值的极限等式不成立,则一定不是一致收敛的.

3. 逐项积分的优点,在于不必求出函数项级数的和函数(也许很困难或不能表为初等函数)而算出它的积分值. 下文中的逐项微分定理的意义也与此相同.

例1 $I=\int_0^1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n(x+n)}\mathrm{d}x=C.$ (Euler 常数)

证明 注意到$\left|\dfrac{x}{n(x+n)}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n(x+n)}$在$[0,1]$上一致收敛. 从而有

$$I=\lim_{N\to\infty}\int_0^1\sum_{n=1}^{N}\frac{x\mathrm{d}x}{n(x+n)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1)\right\}=C.\ (\text{Euler 常数})$$

例 2 在[0,1]上函数列

$$f_n(x)=\frac{\ln(1+n^3x^2)}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

是一致收敛的.

证明 注意到$f_n(x)$的导函数列为

$$f_n'(x)=\frac{2nx}{1+n^3x^2}\quad(n=1,2,\cdots,x\in[0,1]).$$

易知它在[0,1]上一致收敛于$g(x)\equiv 0$. 从而由定理 10.13 的注 1 可知,对 $x\in[0,1]$有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=0,$$

且为一致收敛. 即得所证.

例 3 $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

证明 $x^{-x}=1-x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-x\ln x)}{n!}+\cdots$

是一致收敛的,我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

思考练习 试证明下列命题:

1. 设 $f_n\in C([0,1])\ (n=1,2,\cdots)$,且$f_n(x)$在[0,1]上一致收敛于$f(x)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设$f_n\in R([a,b])\ (n=1,2,\cdots)$,且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$. 若对 $g\in R([a,b])$,令

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,\ F_n(x)=\int_a^x f_n(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

$$(n=1,2,\cdots),x\in[a,b],$$

则$F_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $F(x)$.

3. $f_n\in C([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,且一致有界.若对任意的 $\delta:0<\delta<b-a$,$f_n(x)$在$[a,b-\delta]$上一致收敛于 $f(x)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

4. 计算下列积分

(1) $\int_{\ln 2}^{\ln 5}\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$ $\left(\frac{3}{4}\right)$

(2) $\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2+x^2}\mathrm{d}x.$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\mathrm{d}x.$ (π)

4.3 微分性质的传递

(整序变量的极限与函数极限的次序交换)微分性质的传递与连续或可积性质的传递在条件上稍有不同,请看一例:

例 1 在$(-\infty,\infty)$上级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

是一致收敛的,且每一项$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n^2}$都是可微函数,但其导函数所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

在 $x=0$ 处是发散的.因此,企图用导函数的级数来判断和计算原级数的和函数导数,仅有原函数级数的一致收敛条件是不充分的.

定理 10.14(逐项微分) 设$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续可微,且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上(点)收敛于 $S(x)$.若由其各项的导函数组成的导数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于

$G(x)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,且有

$$S'(x)=G(x),\ x\in[a,b].$$

证明 首先,由 $f_n'(x)$的连续性可知,$G(x)$在$[a,b]$上连续,从而又知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x G(t)\mathrm{d}t=G(x),\ x\in[a,b].$$

其次,由

$$\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t=f_n(x)-f_n(a),\ x\in[a,b],$$

可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)-\sum_{i=1}^{\infty} f_n(a)=S(x)-S(a),$$

$$x\in[a,b].$$

而根据 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_n'(t)$的一致收敛性,对上述左端应用逐项积分公式,又得

$$\int_a^x G(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t=S(x)-S(a).$$

对两端求导即知

$$S'(x)=G(x),\ x\in[a,b],$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),\ x\in[a,b].$$

即对级数可作逐项求导运算.

注 1. 定理 10.14 的条件还可进一步减弱,见本章注记.

2. 在应用逐项微分定理时,应特别留心 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$在$[a,b]$上的一致收敛性:由于求导运算是函数的局部属性,因此区间$[a,b]$只要取在包含该可微点的附近即可,即证明在该点的一个领域上是一致收敛的即可.

例 2 在$(-\infty,\infty)$上函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$连续可导.

证明 (1) 根据在$(-\infty,\infty)$上的不等式$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3}$,可知该级数在$(-\infty,\infty)$上一致收敛,故$S(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续.

(2) 由于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)=\frac{\cos nx}{n^2}$,$x\in(-\infty,\infty)$,故知由各项导函数组成的导数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

在$(-\infty,\infty)$上一致收敛.根据逐项求导定理可知

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\ x\in(-\infty,\infty).$$

因为每一项$\frac{\cos nx}{n^2}$皆连续,所以$f'(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续.

例 3 考察$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$的可微性.

解 (1) 由$\frac{|x|}{n^2+x^2}\leqslant\frac{|x|}{n^2}$可知,此级数在$(-\infty,\infty)$上是点收敛的.

(2) 当$0<|x|<A$时,其导数级数一致收敛,因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(n^2+x^2)|x|}{x}-2x|x|}{(n^2+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n^2|x|}{x}-x|x|}{(n^2+x^2)^2}.$$

$$\left|\frac{n^2|x|}{x}-x|x|\right|\leqslant n^2+A^2.$$

这说明$S(x)$在$x\neq0$处可导.

(3) 当$x=0$时,我们有

$$\lim_{\Delta x\to0\pm}\frac{S(\Delta x)-S(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0\pm}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}.$$

从而可知 $S'_-(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $S'_+(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,这说明 $S(x)$在 $x=0$ 处不可导.

例 4 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上定义,且有

(1) $f(x)$在 $x=0$ 处连续;

(2) 函数$f(2x)-f(x)$具有连续导数. 则$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微.

证明 (1) 令 $g(x)=f(2x)-f(x)$,则

$$f(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)=\cdots=\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{x}{2^k}\right)+f\left(\frac{x}{2^n}\right);$$

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

由于对 $0\leqslant|x|\leqslant A$,存在 ξ:$0<\xi<x$,使得(假定$|g'(x)|\leqslant M$)

$$g(x)=g(0)+g'(\xi)x=g'(\xi)x,\ |g(x)|\leqslant MA;$$

$$\left|g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|\leqslant\frac{|g'(\xi_k)||x|}{2^k}\leqslant\frac{MA}{2^k}.$$

这说明$\sum_{n=1}^{\infty}g\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g'\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^n}$均一致收敛,从而$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微.

例 5 设$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$均在$[a,b]$上有原函数,且在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$,则$f(x)$在$[a,b]$上也有原函数.

证明 由题设不妨假定(否则抽子列)

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,\cdots,x\in[a,b]),$$

且记$\tilde{f}_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)(n=1,2,\cdots)$,则对 $x\in[a,b]$,有

$$f(x)=f_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_n(x);\ |\tilde{f}_n(x)|<\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,\cdots).$$

现在,令 $F'_n(x)=\tilde{f}_n(x)$ $(n=1,2,\cdots;a\leqslant x\leqslant b)$,且不妨假定 $F_n(x_0)=0$ $(a\leqslant x_0\leqslant b)$,则对 $x\in[a,b]$有

第十章 函数项级数

$$|F_n(x)|=|\widetilde{f}_n(\xi)||x-x_0|\leqslant 2^{-n}|x-x_0|.$$

这说明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛. 从而得到 $\left(\text{注意} \sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n'(x)\text{是一致收敛的}\right)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{f}_n(x).$$

因此$f(x)$在$[a,b]$上有原函数.

思考练习 解答下列问题:

1. 试论下列级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的可微性:

(1) $f_n(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{n^2}\right),(-\infty,\infty)$.

(2) $f_n(x)=e^{-n^2\pi x},(0,\infty)$.

(3) $f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-x},(1,\infty)$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p+n^q x},(-\infty<x<\infty,p>1)$.

2. 设$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$均在$[a,b]$上有原函数,且在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$. 若$f_n\in R([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,则$f(x)$在$[a,b]$上有原函数.(请不要利用例5)

3. 存在$\xi\in(0,1)$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{n-1}}{n+1}=1.\left(\text{提示:考察 } S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}\right)$$

注　　记

(一) 一致收敛概念的提出

在论述函数项级数时,Cauchy在《分析教程》中有失检之处. 他大意地认为只要每一函数项都连续,则在收敛时,其和函数也连续,还可以逐项

积分等等.虽然如此,这些命题鼓舞了青年数学家 Abel,他在 1826 年的一篇论文里用反例指出了 Cauchy 断言的这一错误.更可贵的是,Abel 应用了(本质上)一致收敛的思想重新把这一结果树立起来,可惜的是,他没有把这个一致收敛的概念单独地分离出来.此后,直到 1842 年,又由 Weierstrass 独立地提出一致收敛概念,并由此建立起关于函数项级数逐项积分以及逐项微分的定理.

(二)有关乘积函数的一致收敛性

1. 两个一致收敛的函数列的乘积并不一定能保持一致收敛性.

例1 在(0,1]上考察两个函数列($n=1,2,\cdots$):

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right),g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x\text{ 是无理数},\\ q+\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{p}{q}\text{有理数}(p\text{ 与 }q\text{ 互素}).\end{cases}$$

易知在(0,1]上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)=x$,$g_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)=0$ (x 是无理数);$g(x)=q$ $\left(x\text{ 是有理数}\dfrac{p}{q}\right)$. 记

$$h_n(x)=f_n(x)g_n(x)=\begin{cases}x\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right), & x=0,x\overline{\in}Q,\\ x\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(q+\dfrac{1}{n}\right), & x=\dfrac{p}{q},q>0.\end{cases}$$

不难证明在[0,1]上,$h_n(x)$ 点收敛于

$$h(x)=\begin{cases}0, & x=0,x\overline{\in}Q,\\ qx, & x=\dfrac{p}{q},q>0.\end{cases}$$

但不是一致收敛的.实际上,假定是一致收敛的,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$\left|x\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(q+\frac{1}{n}\right)-xq\right|=\left|\frac{qx}{n}+\frac{x}{n}+\frac{x}{n^2}\right|<\varepsilon\ (n>N).$$

因为对 $n>N$,总有 $x_n=\dfrac{p_n}{q_n}\in[0,1]$,其中 $q_n>0$,且 $|p_n|>n\left(\dfrac{2}{N}+\varepsilon\right)$. 我们有

$$\left|\frac{q_nx_n}{n}+\frac{x_n}{n}+\frac{x_n}{n^2}\right|<\varepsilon,|x|\leqslant 1$$

$$\text{左端}\geqslant\frac{|x_nq_n|}{n}-2\frac{|x_n|}{n}>\frac{|p_n|}{n}-\frac{2}{N}$$

$>\frac{2}{N}+\varepsilon-\frac{2}{N}=\varepsilon$. 矛盾.

(三) 用导函数的性质判别一致收敛

命题 10.1 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上可导,$f_n'\in R([a,b])$,且存在正数M,使得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k'(x)\right|\leqslant M,\quad (x\in[a,b],n=1,2,\cdots).$$

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上收敛,则必一致收敛.

证明 对任给$\varepsilon>0$,作$[a,b]$的分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\quad \|\Delta\|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的收敛性可知,存在$N$,当$n\geqslant N$时有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x_{i-1})\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (i=1,2,\cdots,m,\text{一切正整数}\ p).$$

从而当$n>N$时,对一切$x\in[a,b]$,不妨设$x\in[x_{i-1},x_i]$,我们有

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x)\right|=\left|\sum_{n+1}^{n+p}\left\{f_k(x_{i-1})+\int_{x_{i-1}}^{x} f_k'(t)\mathrm{d}t\right\}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(x_{i-1})\right|+\int_{x_{i-1}}^{x}\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k'(t)\right|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2M(x-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}+2M\|\Delta\|<\varepsilon.$$

即得所证.

(四) 一致收敛与绝对一致收敛

M-判别法是判别绝对一致收敛的,但一致收敛可以不是绝对一致收敛的.

例 2 在$[0,1]$上级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$是绝对收敛的,又是一致收敛的,但并不绝对一致收敛.

证明 (1) 因为在$[0,1]$上,有

$$S_n(x)\xlongequal{\text{def}}\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\left\{\begin{matrix}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1,\end{matrix}\right\}\xlongequal{\text{def}}S(x),$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在[0,1]上是绝对收敛的.

(2) 在[0,1]上有

$$M_n=\sup_{[0,1]}\{|A_n(x)-A(x)|\}=1$$

这说明 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在[0,1)上从而也在[0,1]上不绝对一致收敛.

(3) 现在证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在[0,1]上是一致收敛的.

实际上,我们只须阐明

$$R_n(x)=\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$$

在[0,1]上一致收敛于零即可.注意到该级数是交错级数,因此有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1},\quad x\in[0,1].$$

易知函数 $\varphi(x)=(1-x)x^{n+1}$ 在 $x=\frac{n+1}{n+2}$ 处达到最大值

$$\varphi\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

从而根据

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+2}\to 0\ (n\to\infty),$$

即得所证.

(五) 关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$

命题 10.2 若 $\{na_n\}$ 是单调收敛于 0 的数列,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛.

证明 只需指出部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上一致有界即可 $\left(视 a_n\sin nx=na_n\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right)$. 因为

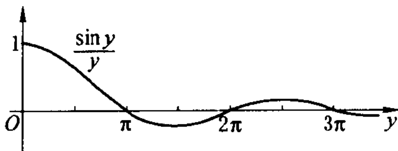


图 10-2

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\cos kt\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\frac{\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}\right\}}{2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t}$$

$$=\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t+\int_0^x\left\{\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right\}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t-\frac{x}{2}$$

$$=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y+\int_0^x\left\{\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right\}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t-\frac{x}{2},$$

注意到(图 10-2)

$$\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right|>\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right|,$$

$$|S_n(x)|\leqslant\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}.$$

由于上式右端的两个积分都存在,且与 n,x 无关,故 $S_n(x)$在$[0,\pi]$上一致有界. 类似地,$S_n(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 上也一致有界.(用 $x=-x'$考察即可)

命题 10.3 若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

在$[-a,a]$上一致收敛的必要条件是:$na_n\to 0\ (n\to\infty)$

证明 由题设以及 Cauchy 准则可知($m>n$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n}^{m}a_k\sin kx=0.\ (对\ x\in[-a,a]一致)$$

现在,取 $x=\frac{\pi}{2m}$,$n=\left[\frac{m}{2}+1\right]$(整数部分),则

$$\sum_{n}^{m}a_k\sin kx>a_m(\sin nx+\cdots+\sin nx)>a_m\left(\frac{m}{2}+1\right)\sin\frac{\pi}{4}.$$

$\left(注意,在括号中至少有\frac{m}{2}+1\ 项,而\ mx>\frac{\pi}{4}\right)$由此即知$\lim\limits_{n\to\infty}ma_m=0$.

命题 10.4 设$\{a_n\}$单调收敛于 0 的数列,则在$[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$上级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\cos nx$$

一致收敛.

证明 由三角公式易知$(-\pi+\delta\leqslant x\leqslant\pi-\delta)$

$$|\cos x-\cos 2x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos nx|\leqslant\frac{2}{2\cos\frac{\delta}{2}},-\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}.$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos nx$ 的部分和有界,根据 Dirichlet 判别法,即得所证.

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$在$[0,1]$上不一致收敛,不过其通项$\frac{\sin(nx)}{n}$在$[0,1]$上是一致收敛于 0 的,而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$在$[0,1]$上是点收敛的.

(六) 关于连续函数的一致收敛

1. 设 $g_{k,n}\in([0,1]),(k\in\mathbf{N}^*)$,且在$[0,1]$上 $g_{k,n}(x)\to f_n(x)(k\to\infty)$.若$|f_n(x)|\leqslant M_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<+\infty$,则

$$\sum_{n=1}^{m}g_{k,n}(x)\to\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)(m\to\infty).$$

2. 下述命题在一定意义下可以看作是推论 10.5 的逆:

命题 10.5(Dini①) (1) 设 $f\in C([a,b]),f_n\in C([a,b])\ (n=1,2,\cdots)$,且有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots;\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in[a,b],$$

则$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$[a,b]$.

(2) $S\in C([a,b]),0\leqslant f_n\in C([a,b])\ (n=1,2,\cdots)$,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n=S(x),\quad x\in[a,b],$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$.

证明 (1) 记 $R_n(x)=f(x)-f_n(x),(n=1,2,\cdots)$,则由题设知

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,R_n(x)\geqslant R_{n+1}(x),(n=1,2,\cdots,x\in[a,b]).$$

① 迪尼(1845~1918),意大利数学家.

我们只需证明 $R_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零即可.

若不然,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任意的正整数 N,必有正整数 $m:m>N$,以及 $x_m\in[a,b]$,使得

$$R_m(x_m)\geqslant\varepsilon_0.$$

因为 $\{x_m\}$ 是有界点列,所以存在子列 $\{x_{m_k}\}$:

$$\lim_{k\to\infty}x_{m_k}=x_0\in[a,b].$$

由函数的连续性可得

$$\lim_{k\to\infty}R_n(x_{m_k})=R_n(x_0)\ (n=1,2,\cdots).$$

另一方面,对充分大的 k,由 $m_k\geqslant k>n$ 可知

$$R_n(x_{m_k})\geqslant R_{m_k}(x_{m_k})\geqslant\varepsilon_0.$$

令 $k\to+\infty$ 又有

$$R_n(x_0)\geqslant\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots).$$

这与 $R_n(x_0)\to0\ (n\to\infty)$ 矛盾,即得所证.

(2) 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$,即知函数列 $\{S_n(x)\}$ 满足(1)中条件,结论自然得出.

例4 在$[0,1]$上函数列

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$$

一致收敛于 e^x.

证明 因为 $f_n\in C([0,1])\ (n=1,2,\cdots)$,且对任意的 $x\in[0,1]$,$f_n(x)$ 是递增列且收敛于连续函数 e^x,所以由 Dini 定理,即得所证.

推论10.6 设 $0<f_n\in C([a,b])\ (n=1,2,\cdots)$,若 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点收敛于 $f\in C([a,b])$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

注意 Dini 定理对非有界闭区间不行,如

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}\ (0,1).$$

例5 设在$[a,b]$上定义有 $f(x)$ 以及连续函数列 $\{g_n(x)\}$,$\{h_n(x)\}$,满足

$$g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x),h_n(x)\geqslant h_{n+1}(x)\ (n=1,2,\cdots),$$
$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x),$$

则 $f\in C([a,b])$.

命题 10.6 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调上升函数. 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点收敛于 $f\in C([a,b])$,则收敛是一致的.

证明 由 f 的连续性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使得

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon\ (i=1,2,\cdots,n).$$

又存在 N,使得

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon\ (i=1,2,\cdots,n;n>N).$$

从而可知,对任意的 $x:x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$,有

$$f_n(x_{i-1})\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(x_i),$$

$$f_n(x_{i-1})-\varepsilon<f(x_{i-1})\leqslant f(x)\leqslant f(x_i)<f_n(x_i)+\varepsilon.$$

(注意 $f(x)$ 是递增的)因此得到

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad(n>N,a\leqslant x\leqslant b).$$

3. 利用一致收敛条件对函数连续性的传递,可以作出具有某种连续性的函数

例 6 对 $[a,b]$ 中的点列 $\{x_n\}$,可作一个在 $[a,b]$ 上递增的函数 $f(x)$,它恰以 $\{x_n\}$ 为不连续点列.

$$f_n(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{n^2}, & x<x_n,\\ 0, & x=x_n,\\ \dfrac{1}{n^2}, & x>x_n,\end{cases}(n=1,2,\cdots),f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),x\in[a,b].$$

证明 易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且由 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上递增,故知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

当 $x_0\neq x_k(k=1,2,\cdots)$ 时,因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$ 在点 x_0 处连续,所以 $f(x)$ 在点 x_0 处连续;当 $x_0=x_k$(某个 k)时,从等式

$$f(x)=f_k(x)+\sum_{i\neq k}^{\infty}f_i(x)$$

可知,右端第二项在点 $x_0=x_k$ 处连续,而第一项在 $x_0=x_k$ 处不连续,因此 $f(x)$ 在点 $x_0=x_k$ 不连续.

4. 一致收敛与等度连续

定义 10.2 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 I 上的函数列. 若对任给的 $\varepsilon>$

0,存在 $\delta>0$,使得当 I 中的点 x',x''满足 $|x'-x''|<\delta$ 时,对一切正整数 n,都有

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上是**等度连续**的.

显然,等度连续函数列中的每一个函数都在 I 上一致连续.

命题 10.7 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 若 $f_n\in C([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

证明 依题设,对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$,均有

$$|f_n(x)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又由 $f_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性,可知存在 $\delta>0$,使得 $[a,b]$ 中点 x',x''满足 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f_N(x')-f_N(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$,以及 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}|f_n(x')-f_n(x'')|&\leqslant f_n(x')-f_N(x')+|f_N(x')-f_N(x'')|\\&\quad+|f_N(x'')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即得所证.

命题 10.8 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的收敛列,若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续,则 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一致收敛列.

证明 依题设不妨假定

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in[a,b].$$

由等度连续性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $[a,b]$ 中点 x',x''满足 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}\ (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$,又立即可得

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |x'-x''|<\delta.$$

现在取自然数 m:$m>\dfrac{b-a}{8}$,而作分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

$$x_i-x_{i-1}<\delta\ (i=1,2,\cdots,m).$$

易知存在 N,当 $n>N$ 时,有

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}\ (i=1,2,\cdots,m).$$

从而当 $n>N$ 时,对$[a,b]$中任一点 x,必有指标 $i_0:1\leqslant i_0\leqslant m$,使得$|x_{i_0}-x|<\delta$,且有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_{i_0})|+|f_n(x_{i_0})-f(x_{i_0})|$$
$$|f(x_{i_0})-f(x)|<\varepsilon.$$

注 下述著名结果属于 Ascoli-Arzela①:

若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上等度连续,且对每一个 $x\in[a,b]$,$\{f_n(x)\}$是有界数列,则存在子列$\{f_{n_k}(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.(证略)

(七)积分性质的传递

关于无穷区间上的积分,我们有

命题 10.9(控制收敛定理) 设对任意的区间$[a,b]$,$f_n\in R([a,b])$ $(n=1,2,\cdots)$,且$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$.若有在$(-\infty,\infty)$上可积的$F(x)$,使得$|f_n(x)|\leqslant F(x)$ $(n=1,2,\cdots)$,则 $f\in R((-\infty,\infty))$,且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 易知$|f(x)|\leqslant F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$,故$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积.对任给的 $\varepsilon>0$,依题设知存在 $A>0$,使得

$$\int_{-\infty}^{-A}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{6},\int_{A}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{6}.$$

又存在 N,当 $n\geqslant N$ 时有$\int_{-A}^{A}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

从而我们有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{A}F(x)\mathrm{d}x+\int_{-A}^{A}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+2\int_{A}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$$
$$<2\cdot\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3}+2\cdot\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon.$$

1885 年,Arzela 证明了下述结论:

命题 10.10(有界收敛定理) 设 $f_n\in R([a,b])$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,且有

① 阿斯科利(1843~1896);阿尔采拉(1847~1912),意大利数学家.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),x\in[a,b],f\in R([a,b]).$$

若 $|f_n(x)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots),x\in[a,b]$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

简化证明可参阅 *Amer. Math. Monthly.* 78 (1971).

(八) 逐项微分问题

1. 定理 10.14 的条件可减弱如下:

命题 10.11 (1) 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的可微函数列,且至少在一个点 $x_0\in[a,b]$ 上是收敛的. 若 $f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$,则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某个 $f(x)$,且 $f'(x)$ 存在,又有 $f'(x)=g(x)$.

(2) (逐项微分)设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可微函数组成的级数,且至少在一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛. 若其导数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $G(x)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $S(x)$,且有 $S'(x)=G(x)$.

证明 (1) 由题设知,存在 N,使得对一切 $x\in[a,b]$ 均有

$$|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},(n\geqslant N,p\in\mathbf{N}^*).$$

应用微分中值定理于函数 $[f_{n+p}(x)-f_n(x)]$,对 $x,t\in[a,b]$,可得位于 x 与 t 之间的 ξ,使得当 $n\geqslant N,p\in\mathbf{N}^*$ 有

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x)-f_n(x)-f_{n+p}(t)+f_n(t)|&=|f_{n+p}'(\xi)-f_n'(\xi)||x-t|\\&<\frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{①}$$

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x)-f_n(x)|&\leqslant|f_{n+p}(x)-f_n(x)-f_{n+p}(x_0)+f_n(x_0)|\\&\quad+|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,不妨设其极限函数为 $f(x)$.

取定 $x\in[a,b]$,对任意 $t\in[a,b]$ 且 $t\neq x$,令

$$\varphi_n(t)=\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}\quad(n=1,2,\cdots);\ \varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

则由$f_n(x)$的可微性得到$\lim\limits_{t\to x}\varphi_n(t)=f_n'(x)$，$(n=1,2,\cdots)$.

注意到式①，对 $n\geqslant N, p\in \mathbf{N}^*$ 均有

$$|\varphi_{n+p}(t)-\varphi_n(t)|=\frac{1}{|t-x|}|f_{n+p}(t)-f_{n+p}(x)-f_n(t)+f_n(x)|$$

$$<\frac{1}{|x-t|}\frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

这说明 $\varphi_n(t)$在$\frac{[a,b]}{\{x\}}$上一致收敛. 注意到 $f_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，故又知

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\varphi(t).$$

即 $\varphi_n(t)$在$\frac{[a,b]}{\{x\}}$上一致收敛于 $\varphi(t)$.

现在对$\{\varphi_n(t)\}$应用 §4 引理 10.1，(注意这里的 $f_n'(x)$相当于 a_n)可得

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=g(x).$$

这一极限的存在性又告诉我们

$$\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(x).$$

综合上述推理，我们有

$$f'(x)=g(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

(2) 证略.

2. 利用逐项求导定理，可以作出具有特定可导性的函数：

例 7 ($f'(x)$在有理点上不连续) 记$\{r_n\}$为$[0,1]$中全体有理数，令

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g(x-r_n), x\in[0,1].$$

(易知上式右端级数在$[0,1]$上一致收敛)因为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g'(x-r_n)$$

在$[0,1]$上一致收敛，所以有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g'(x-r_n).$$

由 $g'(x-r_n)$在 r_n 上的不连续性可知,$f'(x)$在$[0,1]$中一切有理点上不连续.(注意极限与级数求和次序可交换)

3. 在数学发展史上,有许多数学家曾认为连续函数不可微的点是很少的,这是因为他们将连续函数想像成为逐段单调的缘故.直到 19 世纪下半叶,德国数学家 Weierstrass 利用级数构造一个连续函数,并证明它是无处可微的.这一反例震动了数学界,也由此澄清了这一认识上的混乱.此后,许多更简单的连续不可微函数也做出来了.例如记$f(x)=|x|$,$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,且以周期为 1 延拓于$(-\infty,\infty)$,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(4^n x)}{4^n}$$

是一个连续函数,但无处可微.

第十一章　幂级数、Taylor 级数

我们称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数为**幂级数**,它是函数项级数的一种特殊情形,即级数中每一项均为形如 $a_n(x-x_0)^n$ 的幂函数,其中 a_n 只与 n 有关,称为幂级数的**系数**. 当 $x_0=0$ 时,或用 $t=(x-x_0)$ 作代换时,上述幂级数在形式上可化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

幂级数是函数项级数在应用中最重要的一个部分(其他还有下一章中所介绍的三角级数),这在学习将一个函数用多项式逼近的 Taylor 定理中已经有了体会. 在这里,对于幂级数的研讨,集中于下述两个问题:

1. 给定的一个幂级数,寻求其收敛区域及其和函数的各种性质.

2. 给定一个函数,研究它是否以及如何能够用一个幂级数表示? 即有关函数展成幂级数的问题.

让我们从讨论第一个问题开始.

§ 1　幂级数收敛区域的特征——收敛半径

考察在实轴$(-\infty,\infty)$上的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad ①$$

易知在 $x=0$ 处它是收敛的. 对于在 $x\neq 0$ 处的情形,让我们来讨论几个具体的例子.

例 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上收敛.

证明 对任意的 $x_0\neq 0$,根据比值判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x_0^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x_0|}{n+1} = 0.$$

这说明 $x_0\neq 0$ 时,该级数都收敛.

例 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\ x^n$ 除 $x=0$ 外皆发散.

证明 这是因为对任意的 $x_0\neq 0$,我们都有

$$\lim_{n\to\infty} n!\ x_0^n \neq 0.$$

即得所证.

例 3 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x|<1$ 时收敛,在 $|x|\geqslant 1$ 时发散.

上述三例呈现出幂级数的三种收敛区域:

(1) 收敛区域为整个实轴上的点,如例 1;

(2) 收敛区域仅有一个点 $x=0$,如例 2;

(3) 收敛区域是以一个点为中心的对称区间,如例 3 为 $(-1,1)$. 不过,这里指的对称区间也包括闭区间或半开闭区间.

下面将证明上述三种情形,反映出幂级数收敛区域的全部特征.

引理 11.1 (1) 若幂级数①在 $x=x_1\neq 0$ 处收敛,则对 x: $|x|<|x_1|$,①绝对收敛;

(2) 若幂级数①在 $x=x_2$ 处发散,则对 x: $|x|>|x_2|$,①发散.

证明 (1) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛,故有 $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n=0$. 从而知存在 $M>0$,使得

$$|a_n x_1^n|\leqslant M \ (n=0,1,2,\cdots).$$

现在对满足 $|x|<|x_1|$ 的 x,记 $q=\left|\frac{x}{x_1}\right|<1$,则对 $n=0,1,2,\cdots$,有

$$|a_n x^n|=\left|a_n x_1^n\left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right|=|a_n x_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\leqslant Mq^n.$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n\,(0<q<1)$ 的收敛性可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 采用反证法,若有 $x_3:|x_3|>|x_2|$,使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ 收敛,则由(1)可知幂级数①在 $x=x_2$ 处收敛,与题设矛盾,即得所证.

推论 11.1 当幂级数①具有收敛点 $x_1\neq 0$,又有发散点 x_2 时,必存在正数 R,使得当 $|x|<R$ 时,①收敛;$|x|>R$ 时,①发散.

证明 根据引理 11.1 可知,对于满足 $|x|>|x_2|$ 的 x,幂级数①必发散. 因此,凡①的收敛点 x 均满足 $|x|<|x_2|$. 若记①之收敛点集为 E,则 E 为有界点集.

现在记 E 的上确界为 R,显然 $R>0$,下面指出此 R 满足推论的要求:

(1) 设 x 满足 $|x|<R$,此时必存在 x_1,使得 $|x|<x_1<R$. 因为 R 是收敛点集 E 的上确界,所以 $x=x_1$ 必为①的收敛点. 从而由引理 11.1 可知,幂级数①在 x 处收敛.

(2) 设 x 满足 $|x|>R$,此时必存在 x_2,使得 $|x|>x_2>R$. 因为 R 是收敛点集的上确界,所以①必在 $x=x_2$ 处发散. 从而又由引理 11.1 可知,幂级数①在 x 处发散.

定义 11.1 若存在 $R>0$,使得幂级数①在 $x:|x|<R$ 上收敛,在 $x:|x|>R$ 上发散,则称 R 为幂级数①的**收敛半径**.

当幂级数①仅在 $x=0$ 处收敛时，亦称①的收敛半径为零，记为 $R=0$；当幂级数①在任意的 $x\in(-\infty,\infty)$ 上收敛时，亦称①的收敛半径为无穷大，记为 $R=+\infty$.

注 在幂级数①的收敛半径为 $R>0$ 时，$x=\pm R$ 是否为①的收敛点并未确定.

思考练习 试证明下列命题：

1. 若存在 $x_0\neq 0$ 以及 $M>0$，使得数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_nx_0^n|\leqslant M\ (n=0,1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 上收敛.

2. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=4$ 处收敛，试问级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-1$ 处的收敛情况如何？

3. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛而在 $x=4$ 处发散，试求其收敛区域.

4. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n2^n$ 收敛，试证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

5. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

6. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-2,2)$ 上一致收敛，则它在 $[-2,2]$ 上也一致收敛.

7. 设 $\sum\limits_{0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-1$ 时条件收敛，则该级数的收敛半径 $R=1$.

§2 幂级数收敛半径的求法

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad ①$$

的形式比较简洁,其中带有变量 x 的部分都是很有规则的 x 的正整数的幂次,不难想像幂级数的性态主要由幂级数的与 x 无关的系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$确定.

定理 11.1(Cauchy-Hadamard①) 对幂级数①,记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

(1) $\rho=0$ 时,①的收敛半径为 $R=+\infty$;

(2) $\rho=+\infty$时,①的收敛半径为 $R=0$;

(3) $0<\rho<+\infty$时,①的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$.

证明 引用根值判别法于正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n, A_n = |a_n x^n|, \ (n=0,1,2,\cdots)$$

可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = |x|\rho.$$

从而得知在 $0<\rho<+\infty$时有

若$|x|\rho<1$,或$|x|<\frac{1}{\rho}$,则 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛;若$|x|\rho>1$,或$|x|>\frac{1}{\rho}$,则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散;$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_{n+1}x|}{|a_n x|}>1\right)$

在 $\rho=0$ 时,则$|x|\rho=0<1$, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$在$(-\infty,\infty)$收敛;

在 $\rho=+\infty$时,对 $x\neq0$,有$|x|\rho>1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

注 在 $0<\rho<+\infty$的情形,当 $x=\pm R=\pm\rho^{-1}$时,定理没有给出任何信息,必须再对幂级数作具体讨论.

---

① 阿达玛(1865~1963),法国数学家.

推论 11.2 对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \quad ②$$

记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,

(1) $\rho=0$ 时,幂级数②在$(-\infty,\infty)$上收敛;

(2) $\rho=+\infty$时,②仅在 $x=x_0$ 处收敛;

(3) $0<\rho<+\infty$时,②对满足$|x-x_0|<\rho^{-1}$的 x 绝对收敛,对满足$|x-x_0|>\rho^{-1}$的 x 发散.

证明 令 $y=x-x_0$,则有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. 引用定理 11.1 于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$,可知

(1) $\rho=0$ 时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 在$(-\infty,\infty)$上收敛,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在$x-x_0\in(-\infty,\infty)$上收敛,也就是说在$x\in(-\infty,\infty)$上收敛;

(2) $\rho=+\infty$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 仅在 $y=0$ 处收敛,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$仅在$x=x_0$ 处收敛;

(3) $0<\rho<+\infty$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 在$|y|<\rho^{-1}$上绝对收敛,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在$|x-x_0|<\rho^{-1}$上绝对收敛;类似地可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在$|x-x_0|>\rho^{-1}$上发散.

注 在推论 11.2 中,幂级数②出现的三种收敛区域的情形,也可用收敛半径来描述,只不过此时的收敛区域的中心不是$x=0$,而是$x=x_0$. 即当$\rho=0,+\infty$时,幂级数②的收敛半径$R=+\infty,0$;当$0<\rho<+\infty$,②的收敛半径$R=\rho^{-1}$.

推论 11.3 设幂级数①的系数 $a_n \neq 0\ (n=0,1,2,\cdots)$，若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho,$$

则①的收敛半径为 $R=\rho^{-1}$.(认定 $\rho=0$ 时 $R=+\infty$；$\rho=+\infty$ 时 $R=0$)

证明 只需注意到不等式

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

例 1 求下列幂级数的收敛区域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^{n^2}$； (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n x^{3n}$.

解 (1) 令 $t=x+1$，转而考察幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n\ln^2(n+1)}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)\ln^2(n+2)}}{\dfrac{2^n}{n\ln^2(n+1)}}=2.$$

所以其收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$. 从而原级数在 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 上收敛. 又注意到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n+1)}$$

收敛，故当 $x=-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$ 时，原级数绝对收敛. 因此，(1)的收敛区域为 $\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$.

(2) 这是一个缺项幂级数，不妨设

$$a_k=\begin{cases}n^n, & k=n^2,\\ 0, & k\neq n^2,\end{cases}$$

则原级数可写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^{n^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^k$. 从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

这说明其收敛半径为 $R=1$. 又易知当 $x=\pm 1$ 时,该级数发散,因此其收敛区域为$(-1,1)$.

(3) 令 $t=5x^3$,则原级数可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}5^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(5x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

已知后一级数之收敛半径为 $R=1$,且当$|t|=1$时发散. 由$|5x^3|<1$,$|x|<\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$可知原级数的收敛区域为$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}},\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$.

推论 11.4 (1) 设$\{a_n\}$是有界列,则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\geqslant 1$. (2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$. 若有 A: $|A|>R$,则$\{a_nA^n\}$是无界列.

证明 (1) 不妨设$|a_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{M}=1,$$

即得所证. (2)反证:如果$\{a_nA^n\}$是有界列,那么 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|a_nA^n|\left|\frac{x}{A}\right|^n$ 的收敛半径就要大于R,这与题设矛盾.

例 2 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2x^n$ 的收敛域为$[-1,1]$,则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}$的收敛半径仍为$[-1,1]$.

证明 易知$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{n}\right|^{\frac{1}{n}}=1$. 又由不等式$\left|\frac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{a_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}$,可知对 $x=1,-1$ 处 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$仍收敛.

例 3 试论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$ 的收敛域.

解 (1) 注意到$\sqrt[n]{n}\to 1\ (n\to\infty)$以及

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{3^{2k}+2^{2k}}=3,$$

可知该级数收敛半径为$R=\dfrac{1}{3}$.

(2) 当$x=\dfrac{1}{3}$时,级数通项为

$$\frac{3^n+(-2)^n}{n3^n}=\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}>\frac{1}{4n},$$

故级数发散;当$x=-\dfrac{1}{3}$时,级数通项为

$$\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=(-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

故级数收敛.

思考练习 解答下列问题:

1. 求出下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$. (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{-n}x^{3n}$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(x+1)^{n^2}$. (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln n}x^n\ (p>0)$.

2. 设$\{a_n\}$是递减正数列,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$发散,试求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{na_n}{a_{n+1}}x^n$的收敛半径.

3. 设$a_n>0\ (n=0,1,2,\cdots)$,若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散,试证$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$.

4. 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径各为$R_a,R_b$,试证明

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$的收敛半径$R\geqslant R_aR_b$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}x^n$的收敛半径$R\leqslant\dfrac{R_a}{R_b}$.

(3) 若 $a_n, b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 $R=\min\{R_a, R_b\}$.

(4) 若 $a_n, b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}\ (R_b>R_a),$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$ 的收敛半径 $R=R_a$.

§ 3　幂级数的一致收敛及其和函数的性质

大家知道，幂级数在收敛区域 I 内其和是一个定义在 I 上的函数，可记为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ x\in I. \qquad ①$$

从相反的观点看，也可以说函数 $f(x)$ 在(收敛区域) I 上与一个幂级数是相等的，或者说 $f(x)$ 在其上可表示成一个幂级数. 这就是在本章开始时提出的第二个重要课题.

为了研究和函数的性质，在上一章的学习中大家已经知道，一致收敛在其中扮演着关键性角色. 因此研讨幂级数的一致收敛性是我们首先关心的问题.

定理 11.2　若幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots. \qquad ②$$

的收敛半径是 $R>0$ (或为 $+\infty$)，则在任意的内部闭区间 $[-r, r]\ (0<r<R)$ 上，该幂级数是一致收敛(内闭一致收敛)的. 进一步，若②还在 $x=R<+\infty$ (或 $x=-R$) 上收敛，则②在闭区间 $[0,R]$ (或 $[-R,0]$) 上一致收敛.

证明　对于 $[-r,r]$ 中的一切 x，我们有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|r^n\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nr^n|$ 是收敛的,根据 M-判别法,可知②在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

此外,若②在 $x=R$ 处收敛,则对 $[0,R]$ 上的一切 x,有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

注意到 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 随 n 增大而递减,且一致地有 $\left(\frac{x}{R}\right)^n\leqslant 1$,而常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n$(一致)收敛,根据 Abel 判别法 $\left(\text{关于} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)\right)$,幂级数②在 $[0,R]$ 上一致收敛.

类似地可证 $[-R,0]$ 上情形.

定理 11.3(连续性) 设幂级数②的收敛半径为 $R>0$(或 $R=+\infty$),则其和函数 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续.

证明 对任意的点 $x_0\in(-R,R)$,必存在 $R>r>0$,使得 $x_0\in[-r,r]$,由于(1)在 $[-r,r]$ 上一致收敛于 $f(x)$,并注意到幂级数中每一项皆连续函数,故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 因为 x_0 是 $(-R,R)$ 上的任一点,所以 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续.

推论 11.5(Abel 连续性定理) 若常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛,则

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \qquad ③$$

类似地,若 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$ 收敛,则

$$\lim_{x\to(-1)+}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n.$$

证明 考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$,依题设易知它在 $[0,1]$ 上一致收敛. 从而其和函数在 $x=1$ 处左连续,即得所证.

后一结论只需作替换 $y=-x$ 即可.

推论 11.6 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R: 0<R<+\infty$. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛,则

$$\lim_{x\to R-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

证明 只需作替换 $x=Ry$,即可化归为上述推论.

例 1 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 为其 Cauchy 乘积. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

证明 由题设知,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x=1$ 处收敛,当然在 $(-1,1)$ 上绝对收敛,从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right),\quad |x|<1.$$

再根据 Abel 连续性定理,可知存在极限等式

$$\lim_{x\to 1-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

定理 11.4(逐项微分) 设幂级数①的收敛半径为 $R>0$ (或 $R=+\infty$),则其和函数 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续可微,且有

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},x\in(-R,R). \tag{④}$$

又幂级数④的收敛半径仍为 R.

证明 易知由导函数组成的幂级数④的收敛半径为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|na_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=l,R=\frac{1}{l}.$$

故④在 $x\in[-r,r]$ $(r<R)$ 上一致收敛. 从而根据函数项级数

逐项微分定理,可知④式成立.

推论 11.7 具有收敛半径 $R>0$(或 $R=+\infty$)的幂级数②的和函数在$(-R,R)$上是任意次可微的,且可逐项微分,其任意次逐项微分后形成的新级数收敛半径不变.

例 2 在$(-1,1)$上有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

证明 由等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n=\dfrac{x}{1-x}(|x|<1)$可知,对$(-1,1)$中的 x 可进行逐项微分,我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

从而可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<1.$$

例 3 求数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$之和.

解 (1) 视该级数为幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$在 $x=1$ 处之和的两倍.从而问题化为求 $S(x)$.易知此幂级数的收敛域为$[-1,1]$.我们有(逐项求导)

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},(|x|<1);$$

$$S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(|x|<1).$$

由 $S''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$可知

$$S'(x)=\arctan x,\ (S'(0)=0);$$

$$S(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ (S(0)=0).$$

(2) 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=2S(1)=\dfrac{\pi}{2}-\ln 2$.

定理 11.5(逐项积分) 设幂级数②的收敛半径是 $R>0$(或 $R=+\infty$),则对任意的 $x\in(-R,R)$,其和函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上可积,且有

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{⑤}$$

即在收敛区域内可逐项积分. 此外,右端(逐项积分后)的幂级数之收敛半径仍为 R.

证明 因为幂级数②有内闭一致收敛性,再注意到函数项级数的逐项积分定理,可知式⑤成立. 至于收敛半径,只需看等式 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ 即可.

推论 11.8 幂级数②在收敛区域内可进行逐项积分任意多次,其逐项积分后形成的幂级数收敛半径不变.

例 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\ (-1\leqslant x<1)$.

证明 易知级数的收敛域为 $[-1,1)$. 从而对 $-1\leqslant x<1$,我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x).$$

例 5 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$ 的和.

解 (1) 考察级数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$,易知此级数在 $x=1$ 处收敛,从而有

$$S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{3n}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\ln\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

例 6 求幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n+1}$ 在其收敛域上的和.

解 (1) 易知当 $|x|<1$ 时,该级数收敛;当 $|x|>1$ 时,它是发散的.此外,该级数在 $x=1$ 时收敛,$x=-1$ 时发散.从而此级数求和在 $x\in(-1,1]$ 上讨论.

(2) 显然 $S(0)=1$.

(3) 对 $0<x<1$,令 $x=t^2$,则

$$S(t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^t x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\arctan t}{t}.$$

由此知 $S(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

(4) $S(1)=\lim\limits_{x\to 1-}S(x)=\frac{\pi}{4}$.

(5) 对 $-1<x<0$,令 $x=-t^2$,则

$$S(-t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2^{n+1}}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

由此知 $S(x)=\ln\frac{\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}}{2\sqrt{|x|}}$.

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列级数之和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$.　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 收敛. (1) 试问 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $x=R$ 处收敛吗? (2) 试问 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ 在 $x=R$ 处收敛吗?

3. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$. 试证明

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R^{n+1}}{n+1}$ 收敛,则

$$\int_0^R S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^R a_n t^n \mathrm{d}x.$$

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}$ 收敛,则

$$S'(R)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}.$$

4. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $(0<x<1)$,试证明 $S(x)+S(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\cdot\ln(1-x)$. $\Big($提示:$S'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}$,$S(x)+S(1-x)=-\ln x\cdot\ln(1-x)+C$,注意 $\ln x\cdot\ln(1-x)\to 0(x\to 0+)\Big)$

5. 设 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$,且存在极限

$$\lim_{x\to R-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S \ (R>0),$$

试证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n=S$. $\Big($提示:只需指出 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛. 注意

$\sum_{n=0}^{N} a_n R^n$ 递增有界)

§4 函数的幂级数展式——Taylor 级数

鉴于幂级数在收敛区域内的良好性质及其运算的简明性，使人们期望用幂级数来表达一个函数，即给定一个函数，寻求一个幂级数，使其成为该幂级数的和函数.

定义 11.2 一个函数可以在关于点 $x=x_0$ 作幂级数展开，是指存在 $R>0$，以及关于幂 $(x-x_0)^n(n=0,1,2,\cdots)$ 的幂级数，使得在 (x_0-R,x_0+R) 上，$f(x)$ 是此幂级数的和函数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,\quad x\in(x_0-R,x_0+R). \qquad ①$$

此时，也称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**(实)解析**. 特别当 $x_0=0$ 时，称 $f(x)$ 在零点解析.

4.1 函数的 Taylor 级数的概念

首先，让我们考察一下，当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处解析时所必须满足的条件. 此时，因为存在 $R>0$，使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad |x|<R,$$

所以令 $x=0$，可直接得出 $f(0)=a_0$. 因为对 $x\in(-R,R)$ 可进行逐项微分，所以有

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1} \qquad ①$$

以 $x=0$ 代入，则得

$$f'(0)=a_1,a_1=f'(0).$$

再对式①作逐项微分，可知 $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

 从而又有

$$f''(0)=(2!)a_2,\ a_2=\frac{f''(0)}{2!}.$$

依此进行下去,在式

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}$$

中,令 $x=0$,我们有

$$f^{(k)}(0)=(k!)a_k,\ a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

再依此进行下去,……

因此,一般而言,当$f(x)$在 x_0 处解析时,定义 11.2 中式①实际上就是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad ②$$

定义 11.3 设$f(x)$在 $x=x_0$ 处任意次可导,则称(形式地)式②右端为$f(x)$在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数**;当 $x_0=0$ 时,式②也称为 **Maclaurin 级数**;当$f(x)$在 $x=x_0$ 处解析时,式②称为$f(x)$在 x_0 处的 **Taylor 展式.**

本节的目的是寻求各种函数的 Taylor 级数展式.然而下例指出,仅具有所有阶导数,函数不一定是解析的.

例 在$(-\infty,\infty)$上考察任意次可微的函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时,此函数具有任意次导数,且易知

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

一般来说,我们有

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},(x\neq 0).$$

其中,$P_n\left(\frac{1}{x}\right)$是关于$\frac{1}{x}$的某个多项式(注意,这里的 n 不是该多

项式的最高次幂，$f^{(n)}(x)$是形如$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}$的线性组合)

用变量替换 $t=\frac{1}{x^2}$，并应用 L'Hôpital 法则，易得

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t}=0.$$

由此可知

$$\lim_{x\to 0\pm}f^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因为$f(x)$在 $x=0$ 处连续，所以有 $f'(0)=0$. 类似地逐次可推得 $f^{(n)}(0)=0$ $(n=2,3,\cdots)$.

这样，$f(x)$在 $x=0$ 处的 Taylor 级数的系数全为 0. 自然，此 Taylor 级数在$(-\infty,\infty)$上收敛，且其和为零函数. 但是，$f(x)$只在 $x=0$ 处为零值，这说明此$f(x)$在 $x=0$ 处不是解析的.

思考练习 解答下列问题：

1. 设$f(x)$，$g(x)$皆在 $x=0$ 处解析，试证明$f(x)+g(x)$以及$f(x)g(x)$也在 $x=0$ 处解析.

2. 试证明多项式

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

在 $x=0$ 处解析，也在任意的 $x_0\in(-\infty,\infty)$处解析.

3. 若$f'(x)$在点 $x=x_0$ 处解析. 试证明$f(x)$也在 $x=x_0$ 处解析.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处解析，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$. 求 $F^{(n)}(0)$，其中

$$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

4.2 判定函数的 Taylor 级数展式的方法

(一) 余项估算法

设$f(x)$在$x=x_0$处任意次可导,记

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,(n\in\mathbf{N}^*).$$

易知为获得$f(x)$在x_0处的 Taylor 展式,只需指出对$x\in U(x_0)$,有$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$.

为使$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$,自然回忆起余项$R_n(x)$的各种表达式(第(3)、(4)种见第七章注记(五)):

(1) $R_n(x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$;(Peano 余项)

(2) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$;(Lagrange 余项)

(3) $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$;(积分式余项)

(4) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$;(Cauchy 余项)

Peano 余项(1)只告诉我们一种态势,不利于具体估算.其余三种余项形式,下面将看到它们的应用.

例 1 在$(-1,1]$上$\ln(1+x)$有 Taylor 展式($x_0=0$):

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots. \quad ①$$

证明 (1) 因为有($f(x)=\ln(1+x)$)

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

所以其 Taylor 公式中的 Lagrange 余项为

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

从而在$0\leqslant x\leqslant 1$时;有$0<\dfrac{1}{1+\theta x}\leqslant 1$,由此可得$|R_n(x)|<\dfrac{1}{n+1}$.这说明

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

(2) 在$-1<x<0$时,将余项写成 Cauchy 形式:

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}.$$

此时有$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1,\frac{1}{1+\theta x}=\frac{1}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|}$.

因此可得

$$|R_n(x)|\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad -1<x<0.$$

当$|x|>1$时,式①是发散的.

从上述举例中已经看到,在运用中值型余项的估计时,困难往往发生在中值点$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$的不明确性上.因此从估计其n阶导函数在x_0的邻域上的上界入手,是自然的作法,这就有了下述结果:

定理 11.6 设$R:0<R<+\infty,f\in C^{(\infty)}((x_0-R,x_0+R))$.若存在$M>0$,使得对一切$x\in(x_0-R,x_0+R)$,有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M^n\quad(n=1,2,\cdots).\tag{②}$$

则得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,x\in(x_0-R,x_0+R).\tag{③}$$

证明 由条件②知,对$x\in(x_0-R,x_0+R)$有

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\right|\leqslant\frac{M^nR^n}{n!}\to0\quad(n\to\infty).$$

即得所证.

注意,若$f\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$,且条件②对一切$x\in(-\infty,\infty)$皆成立,则式③对一切$x\in(-\infty,\infty)$成立.

例 2 $\cos x$、$\sin x$在$(-\infty,\infty)$上有 Maclaurin 展式

(1) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$;

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$.

证明 以(1)为例,设$f(x)=\cos x$,则对 $x\in(-\infty,\infty)$有

$$|f^{(n)}(x)|=\left|\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1, n=1,2,\cdots.$$

从而取 $M=1$,由定理 11.6 即得所证.

例 3 在$(-\infty,\infty)$上有 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$.

证明 记$f(x)=e^x$,则对 $x\in(-\infty,\infty)$,可取 $r>0$,使得 $x\in(-r,r)$. 由此可知

$$|f^{(n)}(x)|=e^x\leqslant e^r, x\in(-r,r), n=1,2,\cdots.$$

从而取 $M=e^r$,由定理 11.6 即得所证.

(二) 微分积分法

在(一)中大家看到,为了获得函数的 Taylor 展式,须求出其 n 阶导数的表达式. 这有时将导致复杂的操作,下面我们将要介绍的另一种方法,是建立在唯一性结论基础上的.

定理 11.7 若对一切 $x\in(x_0-r,x_0+r)$, $(r>0)$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=0,$$

则 $a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

证明 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, x\in(x_0-r,x_0+r),$$

则由题设知,对一切 $x\in(x_0-r,x_0+r)$, $f(x)=0$. 因此有

$$f^{(n)}(x)=0, x\in(x_0-r,x_0+r), n=1,2,\cdots.$$

另一方面,由于该幂级数的收敛半径 $R>0$, $f(x)$在(x_0-R,x_0+R)上是该幂级数的和函数,故可知

$$0=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

即得所证.

推论 11.9(唯一性) 若存在 $r>0$,使得收敛幂级数满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,x\in(x_0-r,x_0+r).$$

则 $a_n=b_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

证 略.

这一推论称为幂级数的恒等定理或唯一性定理.据此,可以通过任意展开幂级数的方式来确定 Taylor 级数展式.现以 $x_0=0$ 举例如下:

例 4 在$[-1,1]$上有

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

证明 因为在$(-1,1)$上,有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,$$

所以对$|x|<1$作逐项积分可得

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=\int_0^x\mathrm{d}t-\int_0^x t^2\mathrm{d}t+\cdots+(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t+\cdots$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

例 5 在$(-1,1)$上有二项式 Taylor 级数展式

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ \alpha\in(-\infty,\infty),\qquad ④$$

$$\binom{\alpha}{0}=1,\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明 不妨假定 $\alpha\neq0,1,2,\cdots$.因为有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}}\right|=1,$$

所以式④中幂级数的收敛半径 $R=1$,记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

注意到在$(-1,1)$上能逐项求导,故得

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x)&=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^n\\&=\binom{\alpha}{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\binom{\alpha}{n}+(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\right]x^n\\&=\binom{\alpha}{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha f(x),\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

由此可知,在 $x\in(-1,1)$上$(1+x)f'=\alpha f(x)$,在两端乘以$(1+x)^{-\alpha-1}$,我们有

$$(1+x)^{-\alpha}f'(x)=\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x),\quad x\in(-1,1).$$

从而导出

$$[(1+x)^{-\alpha}f(x)]'=0,\quad x\in(-1,1).$$

这说明存在常数 C,使得

$$(1+x)^{-\alpha}f(x)=C,\quad x\in(-1,1).$$

而由 $f(0)=1$ 知 $C=1$. 最后得到

$$f(x)=(1+x)^{\alpha},\quad x\in(-1,1).$$

即得所证.

对于 $x=-1$,则当 $\alpha>0$ 时④收敛,$\alpha<1$ 时④发散;对于 $x=1$,则当 $\alpha\leqslant-1$ 时④发散,$\alpha>-1$ 时④收敛.(见本章注记(八))

例 6 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ (-1<x<1).$

证明 这是二项式型函数,$\alpha=-\dfrac{1}{2}$,则

$$\binom{\alpha}{n}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\frac{\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

即得所证.

例 7 求函数$f(x)=\arcsin x$ 的 Maclaurin 展式.

解 注意到$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,又有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},|x|<1,$$

因此可得

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1.$$

(三)其他展式判定法举例

例 8 $f(x)=\dfrac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$在 $x=0$ 处的 Taylor 展式.

解 首先,分解$f(x)$为

$$f(x)=\frac{2}{2x-3}-\frac{x}{x^2+4}.$$

其次,再写成标准((二)中所举格式)形式

$$f(x)=-\frac{2}{3\left(1-\frac{2x}{3}\right)}-\frac{x}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}.$$

由此立即可得$\left(|x|<\dfrac{3}{2}\right)$

$$f(x)=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{3}\right)^n-\frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}.$$

$$\left(=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\right]x^{2n+1}\right)$$

例 9 $f(x)=\ln(4+3x-x^2)$在 $x=0$ 处的 Taylor 展式.

解 把$f(x)$分解为标准式

$$f(x)=\ln(4-x)(x+1)=\ln4\left(1-\frac{x}{4}\right)(1+x)$$

$$=\ln4+\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)+\ln(1+x).$$

从而可得

$$f(x)=\ln4-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$=\ln4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^{n-1}-4^{-n}]x^n, x\in(-1,1].$$

例 10 $f(x)=\sin^4 x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展式.

解 将 $f(x)$ 写成

$$f(x)=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1+\cos4x}{8}$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x,$$

从而有($-\infty<x<\infty$)

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

例 11 $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(1-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^n\ (|x-x_0|<|1-x_0|)$.

证明 只需注意

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x_0-(x-x_0)}=\frac{1}{1-x_0}\frac{1}{1-(x-x_0)(1-x_0)^{-1}},$$

$$=\frac{1}{1-x_0}\left\{1+\frac{x-x_0}{1-x_0}+\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2+\cdots\right\}.$$

4.3 应用举例

例 1 求积分值 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

解 应用 Taylor 展式

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n},\quad x\in(-1,1],$$

可得

$$I=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

再注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

我们有(参见有关 Fourier 级数的内容)$I=\frac{\pi^2}{12}$.

例 2 设$f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$,求 $f^{(n)}(0)\quad(n=1,2,\cdots)$.

解 将$f(x)$改写为($|x|<1$)

$$f(x)=1-\frac{2x}{1+x+x^2}=1+(2x^2-2x)\frac{1}{1-x^3}.$$

由展式($|x|<1$)

$$(1-x^3)^{-1}=1+x^3+x^6+\cdots,$$

可知($|x|<1$)

$$\begin{aligned}f(x)&=1+(2x^2-2x)(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-2x^7+2x^8+\cdots.\end{aligned}$$

从而我们有 $\left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$

$$a_n=\begin{cases}-2, & n=3k-2,\\2, & n=3k-1,(k=1,2,\cdots);a_0=1.\\0, & n=3k\end{cases}$$

再由公式 $f^n(0)=n!\,a_n$ 即得所求.

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}=1-\frac{\pi}{2}$.

证明 注意到

$$\frac{\cos x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!},\ (x\neq0);$$

$$\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2(n-1)},\ (x\neq 0),$$

我们有$(x\neq 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2n}=x^2\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)'=1-\cos x-x\sin x.$$

以 $x=\frac{\pi}{2}$代入即得所证.

例 4 确定 λ 的取值,使得

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\leqslant e^{\lambda x^2}\ (-\infty<x<\infty).$$

解 (1) 若上述不等式成立,则有

$$0\leqslant e^{\lambda x^2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n x^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^{2n}}{n!}.$$

两端除以 x^2,再令 $x=0$,可得 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$.

(2) 若 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$,则有

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=e^{\frac{x^2}{2}}\leqslant e^{\lambda x^2}.$$

例 5 设 $\frac{1}{1-x-x^2}$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}}$收敛.

证明 由题设知$(1-x-x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=1$,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2}=1.$$

由此知 $a_0=a_1=1, a_{n+1}=a_{n+2}-a_n(n=0,1,2,\cdots)$. 从而可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k\cdot a_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)=2-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}.$$

由 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ 知 $a_n\geqslant n$,故该级数收敛且其和为 2.

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数展式的收敛半径:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a\neq 0)$. (2) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-|3x+2|}$.

2. 求下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数展式:

(1) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$.

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. $\left(\text{提示}: f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

3. 求下列函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 级数展式:

(1) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ $(\ln x=\ln[1+(x-1)], \ln(1+x)=\ln[2+(x-1)])$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\left(f(x)=-\left(\dfrac{1}{x}\right)'\right)$.

4. 试证明下列等式:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}=(1+2x^2)e^{2x}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}$. $\left(\text{提示}:\text{注意}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+n-2}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{3x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2}\right)$

5. 试求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1+x)\,dx$. (先分部积分)

(2) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$. $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\ (2n+1)}\right)$

6. 设 $f\in C^{(\infty)}((-\infty,\infty))$,且存在 $M>0$,使得

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M, x\in(-\infty,\infty)\ (n=0,1,2,\cdots).$$

若有 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$ $(n=1,2,\cdots)$,试证明 $f(x)\equiv 0$.

7. 设$f(x)$在 $x=0$ 处解析. 若 $g(x)=f(x^2)$,试证明 $\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\quad(n=1,2,\cdots)$.

8. 设$a_1=\alpha,a_2=\beta,a_{n+2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)a_{n+1}+\left(\frac{1}{n}\right)a_n(n=1,2,\cdots)$,则 $a_n\to\alpha+(\alpha-\beta)(\mathrm{e}^{-1}-1)$. $\left(\text{提示:注意 } a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{a_{n+1}-a_n}{n}\right)$

§5 多项式逼近连续函数

从部分和角度看函数$f(x)$的 Taylor 级数展式,就是一个关于 x 的代数多项式在级数的收敛域上趋近于$f(x)$的问题. 即记

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

我们有

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon,\ n\geqslant N,$$

而且在收敛域的内闭区间上,上述不等式对 x 一致成立. 这就是说,在闭区间上,Taylor 多项式可一致逼近于$f(x)$. 不过,此时要求$f(x)$必须是任意次可微的.

但是,如果仅从多项式一致逼近于一个函数的观点看,那么只需要$f(x)$在闭区间上连续即可. 这一著名结果属于 Weierstrass(当时是一名中学教师),对于研究连续函数性质有重大意义.

引理 11.2(辅助恒等式)

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$;(2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)x^k(1-x)^{n-k}=0$;

(3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}$.

证明 (1) 可由 Newton 二项式定理 $1^n=(x+(1-x))^n$ 直接得出.

(2) 注意到 $k\geqslant 1$ 时有 $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$,可知

$$\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i}=x.$$

由此即得所证.

(3) 类似于(2),我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=nx\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}ix^i(1-x)^{n-1-i}=n(n-1)x^2.$$

再根据(1)与(2)可得

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}\right\}$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}+x^2$$

$$=\frac{n(n-1)}{n^2}x^2+\frac{nx}{n^2}-2x^2+x^2=\frac{x(1-x)}{n}.$$

定义 11.4 设$f(x)$在$[0,1]$上定义,称多项式

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\left(0^0\overset{\text{def}}{=\!=}1\right)$$

为 f 的 n 阶 **Бернштейн 多项式.**

例 1 $f(x)=x^2$,则其 Бернштейн 多项式为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{x}{n}(1-x+nx)=\frac{x(1-x)}{n}+x^2.$$

定理 11.8(Weierstrass) 设 $f\in C([a,b])$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在多项式 $P(x)$,使得

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\ x\in[a,b] \qquad ①$$

证明 (1) 只需考察$[a,b]=[0,1]$的情形,这是因为若式(1)对定义在$[0,1]$上的连续函数成立,则对 $f\in C([a,b])$,注意到 $f(a+t(b-a))$是$[0,1]$上的连续函数,就有多项式 $P(t)$,使得

$$|f(a+t(b-a))-P(t)|<\varepsilon,\ t\in[0,1].$$

由此经变量替换可知

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon,\ x\in[a,b].$$

这里的 $P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$是 x 的多项式,所以定理对 $f\in C([a,b])$成立.

(2) 现在设 $f\in C([0,1])$,作多项式

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$

由于$f(x)$在$[0,1]$上一致连续,故对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x',x''\in[0,1]$,$|x'-x''|<\delta$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 $p_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(n\geqslant1)$,由引理 11.2 之(1)及(3),$M=\max\{|f(x)|:0\leqslant x\leqslant1\}$,我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f,x)|&=\left|f(x)\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)-B_n(f,x)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)p_{n,k}(x)\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|p_{n,k}(x)\\&=\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|p_{n,k}(x)\\&\quad+\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|p_{n,k}(x)\end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}p_{n,k}(x)+2M\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\delta}p_{n,k}(x)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)+\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2p_{n,k}(x)$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}.$$

取 N,使得 $n\geqslant N$ 时,有$\frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$.从而当 $n\geqslant N$ 时有

$$|f(x)-B_n(f,x)|<\varepsilon,x\in[0,1].$$

上述逼近定理的证明是 Бернштейн 在 1912 年给出的(从概率思想中引发),其优点是初等的且属于构造性证明. 但上述结果对无穷区间不一定成立. 如对$[1,\infty)$上的$f(x)=e^{-x^2}$,只需注意$f(x)\to0(x\to+\infty)$,而任一非常数多项式 $P_n(x)$,总有$|P_n(x)|\to+\infty(x\to+\infty)$. 实际上,我们还有下述结论:

定理 11.9 若多项式列$\{P_n(x)\}$在$(-\infty,\infty)$上一致收敛于$f(x)$,则$f(x)$必为多项式.

证明 依题设,存在 n_0,使得

$$|P_n(x)-P_m(x)|<1\ (n,m\geqslant n_0;-\infty<x<\infty).$$

这说明 $P_n(x)-P_m(x)$是一个常数,不妨设

$$P_n(x)=P_{n_0}(x)+a_n(n>n_0)$$

且不妨就假定 $a_n\to a\ (n\to\infty)$. 从而知$f(x)=P_{n0}(x)+a$.

对于开区间上的$f(x)$而言,这种多项式列一致逼近相当于$f(x)$的一致连续性,请看下述定理:

定理 11.10 设 $f\in C((0,1))$,则$f(x)$在$(0,1)$上可用多项式列一致逼近当且仅当$f(x)$可连续延拓到$[0,1]$上.

证明 充分性显然. 对于必要性,只需指出$f(x)$在$(0,1)$上一致连续.

为此,对任给 $\varepsilon>0$,取多项式 $P(x)$使得$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ $(0<x<1)$. 因为 $P(x)$在$(0,1)$上一致连续,所以存在 $\delta>0$,使得

$$|P(x')-P(x'')|<\varepsilon,(0<x',x''<1,|x'-x''|<\delta).$$

由上可知,当 $x',x''\in(0,1)$且$|x'-x''|<\delta$时,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-P(x')|$$
$$+|P(x')-P(x'')|+|P(x'')-f(x'')|<3\varepsilon.$$

例 2 设 $f\in C([a,b])$. 若有

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0,(n=0,1,2,\cdots),$$

则$f(x)\equiv 0$.

证明 由题设易知,对任一多项式 $Q(x)$,有$\int_a^b Q(x)f(x)\mathrm{d}x=0$. 又根据 Weierstrass 逼近定理可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在多项式 $P(x)$,使得

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\quad x\in[a,b].$$

从而有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b[f^2(x)-f(x)P(x)]\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b|f(x)||f(x)-P(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

由 ε 的任意性,可知$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$. 由此即得　$f(x)=0,x\in[a,b]$.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设 $f\in C([-1,1])$.

(1) 若$\int_{-1}^1 x^{2n}f(x)\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots)$,则$f(x)$是$[-1,1]$上的奇函数.

(2) 若$\int_{-1}^1 x^{2n+1}f(x)\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots)$,则$f(x)$是$[-1,1]$上的偶函数.

2. 设 $f\in C([a,b])$,n_0 是固定正整数,若有

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x=0 \quad (n=n_0,n_0+1,\cdots),$$

则$f(x)=0,x\in[a,b]$.

3. (1) 设$f\in C([1,\infty))$,且$f(x)\to A(x\to+\infty)$,则对任给$\varepsilon>0$,存在多项多式P,使得

$$\left|f(x)-P\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon,\ x\in[1,\infty);$$

(2) 设$f\in C([0,\infty))$,且$f(x)\to A(x\to+\infty)$,则对任给$\varepsilon>0$,存在多项多式P,使得

$$|f(x)-P(\mathrm{e}^{-x})|<\varepsilon,\ x\in(0,\infty).$$

4. 设$f(x)$定义在$[a,b]$上,若对任给$\varepsilon>0$,存在多项式$P(x)=P_\varepsilon(x)$,使得

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\ x\in[a,b],$$

则$f\in C([a,b])$.

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上有界且有原函数,$g\in C([a,b])$,则$f(x)\cdot g(x)$在$[a,b]$上有原函数.(提示:存在多项式列$\{P_n(x)\}$,使得$P_n(x)\cdot f(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$g(x)f(x)$.)

6. 设$f(x)$在$[a,b]$上有界且有原函数,$g:[0,1]\mapsto[a,b]$有连续导数且$g'(x)>0$,则$f[g(x)]$在$[0,1]$上有原函数.

注　　记

(一) 求与幂级数类似的级数的收敛域

利用幂级数求收敛域的方法,还可对求类似的级数的收敛域有所助益.

例1 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\sqrt{n}x^n}$的收敛区域.

解 令$t=\frac{1}{x}$,易知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\sqrt{n}}t^n$的收敛半径为$R=2$.又当$t=2$时,该级数发散;$t=-2$时,该级数收敛.因此,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\sqrt{n}}t^n$的收敛区域为

$[-2,2)$. 从而原级数的收敛区域为$\left\{x:-2\leqslant x^{-1}<2\right\}$,即$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$和$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

命题 11.1 设$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=1$处发散. 若$\frac{a_n}{S_n}\to 0\left(n\to 0,S_n=\sum_{n=1}^{n}a_k\right)$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为1.

证明 由题设可知$(n\geqslant 2)$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=1+\frac{a_n}{S_n-a_n}=1+\frac{\frac{a_n}{S_n}}{\left(1-\frac{a_n}{S_n}\right)}\to 1\ (n\to\infty).$$

从而又有$\sqrt[n]{S_n}\to 1(n\to\infty)$. 由此可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}=1.$$

另一方面,因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散,所以该级数收敛半径又必须小于等于1.

(二) 关于 Abel 连续性定理

1. Abel 定理之逆一般并不成立. 即对收敛幂级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $(-R<x<R)$,虽然有极限$\lim_{x\to R-}f(x)$,但$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$可以不收敛. 例如

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,\quad -1<x<1.$$

我们有$f(x)\to\frac{1}{2}(x\to 1-)$,但$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散.

不过,在$\{a_n\}$满足更多性质时,该定理之逆是成立的.

命题 11.2(Tauber) 设有$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $(-1<x<1)$,且存在极限$\lim_{n\to\infty}na_n=0$. 若存在$\lim_{x\to 1-}f(x)=S$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S.$$

证明 令$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k|a_k|}{n}$,易知$\sigma_n\to 0\ (n\to\infty)$. 又依题设有

$f\left(1-\frac{1}{n}\right)\to S(n\to\infty)$,故可知存在 N,当 $n\geqslant N$ 时

$$\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)-S\right|<\frac{\varepsilon}{3},\sigma_n<\frac{\varepsilon}{3},n|a_n|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

记 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$,且写出

$$S_n-S=f(x)-S+\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k.$$

注意到对每个 k 以及 $x\in(0,1)$,有

$$(1-x^k)=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})\leqslant k(1-x).$$

因此,当 $n\geqslant N$ 且 $0<x<1$ 时,我们有

$$|S_n-S|\leqslant|f(x)-S|+(1-x)\sum_{k=0}^{n}k|a_k|+\frac{\varepsilon}{3n(1-x)}.$$

现在取上式中的 x 为 $x_n=1-\frac{1}{n}$,立即可得

$$|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

注 若在$(-1,1)$上,$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 存在 $\lim_{x\to1-}f(x)=S$,则称 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ **可 Abel 求和,并称 S 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的广义 Abel 和.**

2. 幂级数求和法及其应用还有多种类型,兹再举若干例如下:

例2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数满足

$$a_n+Aa_{n-1}+Ba_{n-2}=0\quad(n=2,3,\cdots).$$

若此幂级数在点 $x=x_0$ 处收敛,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=\frac{a_0+(a_1+Aa_0)x_0}{1+Ax_0+Bx_0^2}.$$

证明 因为我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n&=a_0+a_1x_0+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx_0^n\\&=a_0+a_1x_0-\sum_{n=2}^{\infty}(Aa_{n-1}+Ba_{n-2})x_0^n\\&=a_0+a_1x_0-Ax_0\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x_0^{n-1}-Bx_0^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x_0^{n-2}\end{aligned}$$

$$=a_0+a_1x_0-Ax_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n-a_0\right)-Bx_0^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n,$$

所以可移项得到

$$(1+Ax_0+Bx_0^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=a_0+(a_1+Aa_0)x_0.$$

从而可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=\frac{a_0+(a_1+Aa_0)x_0}{1+Ax_0+Bx_0^2}.$$

例 3 求幂级数 $S(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$ 的和.

解 首先,易知该幂级数的收敛半径为 1. 其次,对 $|x|<1$,作逐项微分可知

$$S'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots.$$

从而对 $x\neq 0$,有

$$x^2S'(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots=-x-\ln(1-x),$$

$$S'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}.$$

定义 $S'(0)=\frac{1}{2}$ ($x=0$ 是 $S'(x)$ 的可去间断点),则作积分可得

$$S(x)=\int S'(x)\mathrm{d}x=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+C.$$

注意到 $\lim\limits_{x\to 0}S(x)=0$,易知 $C=1$,因此有

$$S(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

对于 $x=\pm 1$ 的情形,因为原级数收敛,所以根据 Abel 定理,$S(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处连续,就有结论

$$S(-1)=1-2\ln 2,\quad S(1)=1.$$

3. 求方程

$$y''-xy=0$$

满足 $y(0)=1$,$y'(0)=0$ 的解 $y=f(x)$.

解 该方程称为微分方程,因为它含有未知函数 $y=y(x)$ 及其导数. 又有变量 x 伴随未知函数 $y(x)$,故又称其为变系数微分方程. 我们的目的

是，求出 $y=y(x)$ 使其满足此方程，以及满足 $y(0)=1,y'(0)=0$. 此即所谓求微分方程满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 之解.

下面的求解方法称为幂级数解法，即设其解有幂级数形式

$$y=y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

若能作逐项微分，可得

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

代入微分方程，并注意到 $xy=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$，可知

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n.$$

比较上式两端同幂次的系数，得到(注意 $a_0=1,a_1=0$)

$$a_2=0,(n+1)(n+2)a_{n+2}=a_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由此又知　$a_5=0,a_8=0$，实际上有 $a_{3n-1}=0\quad(n=1,2,\cdots)$. 这样，我们有系数公式

$$a_{3n}=\frac{a_0}{(2\cdot3)(5\cdot6)\cdots((3n-1)\cdot3n)},$$

$$a_{3n+1}=\frac{a_1}{(3\cdot4)(6\cdot7)\cdots(3n(3n+1))}.$$

再根据初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$，又得 $a_0=1,a_1=0$ 这就导致

$$y(x)=1+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^6}{(2\cdot3)(5\cdot6)}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(2\cdot3)(5\cdot6)\cdots((3n-1)\cdot3n)}+\cdots.$$

不难证明此幂级数之收敛半径为 $R=\infty$. 从而上述一切运算皆正确，并得到了该方程满足初始条件的解.

(三) Taylor 级数发展史

将 $f(x)$ 展成 $(x-x_0)$ 的幂级数的工作，最早出现在英国数学家 Taylor 的 1715 年的著作《Methodus incrementorum directa et inversa》中(没有考虑其收敛性). $x_0=0$ 时之所以称为 Maclaurin 展式，是因为他的两卷有影响的巨著《Treatise of fluxions》中所显示出的这一工作的应用. 但人们真正且广泛地认识到 Taylor 级数的重要性的时期，是在 Euler(1775 年)巧妙地将其应用于微分学中，以及 Lagrange(1797 年)把它作为函数论的基

础之后.

(四) Euler 公式

e^x 与 $\cos x,\sin x$ 从表面看没有什么关系,但若对上述展开式作仔细观察,不难发现 e^x 正是后两者的某种组合,即应用虚数单位 i 的运算性质,在 e^x 的展式中以 it 换 x,则得到

$$e^{it}=\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right),$$

从而在形式上导出

$$e^{it}=\cos t+i\sin t.$$

这一工作是 Euler 认出的,我们称它为 **Euler 公式**. 由此还可导出

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$$

$$e^{x+iy}=e^x(\cos x+i\sin x)$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

等等. Euler 公式的严格证明从略.

(五) Taylor 级数的另一类收敛条件

函数的 Taylor 级数展开还有另一类收敛条件,即

命题 11.3(Бернштейн[①] 定理) 设$f(x)$在$[x_0,x_0+h)$上及其任意次导数都是非负的,则 Taylor 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

在$[x_0,x_0+h)$上收敛于$f(x)$.

证明 不妨设 $x_0=0$(否则作一变换即可)且只需讨论 $x\in[0,h)$的情形. 引用积分余项的 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x),R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

并用变换 $x-t=xu$,改写 $R_n(x)$为

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x-xu)\mathrm{d}u.$$

注意到导函数的递增性可知

$$f^{(n+1)}(x-xu)\leqslant f^{(n+1)}[h(1-u)],\quad 0\leqslant u\leqslant 1.$$

---

① 伯恩斯坦(1880～1968),苏联数学家.

从而当 $0\leqslant x<h$ 时可得

$$\begin{aligned}R_n(x)&\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(h-hu)\mathrm{d}u\\&=\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1}\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(h-hu)\mathrm{d}u\\&=\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1}R_n(h)\leqslant\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1}f(h).\end{aligned}$$

显然有 $R_n(x)\to 0\ (n\to\infty,0\leqslant x<h)$. 即得所证.

(六) 函数在一点解析的充分必要条件

命题 11.4 函数 $f(x)$ 在其定义域上一点 $x=x_0$ 处是解析的充分必要条件是:存在 $r>0$ 以及正数 $A(r)$(与 x 无关),使得 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0+r) 上具有任意次导数,且对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{rA(r)n!}{(r-|x-x_0|)^{n+1}},\quad x\in(x_0-r,x_0+r).\tag{①}$$

证明 充分性. 假定式①成立,取 x 满足 $0<|x-x_0|<\frac{r}{2}$,使得

$$\frac{|x-x_0|}{(r-|x-x_0|)}<1.$$

从而由 Lagrange 余项的 Taylor 公式以及式①,可知

$$\begin{aligned}&\left|f(x)-\sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\leqslant\frac{rA(r)n!}{(r-|x-x_0|)^{n+1}}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\\&\leqslant rA(r)\left(\frac{|x-x_0|}{r-|x-x_0|}\right)^{n+1}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

这说明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处解析.

必要性. 假定 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处解析,即存在 $r'>0$,使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in(x_0-r',x_0+r').$$

其中,对每一个非负整数 k,易知

$$f^{(k)}(x)=k!\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}a_{n+k}(x-x_0)^n.$$

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant k!\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}|a_{n+k}||x-x_0|^n.$$

现在取 $r:0<r<r'$,显然 x_0+r 位于该幂级数的收敛域内,故知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ 收敛. 由 $|a_n|r^n\to 0\ (n\to\infty)$ 可知,存在正数 $A(r)$,使得

$$|a_n|r^n<A(r)\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

从而我们得到

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant k!\ r^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}|a_{n+k}|\frac{|x-x_0|^n}{r^n}r^{n+k}$$

$$\leqslant k!\ r^{-k}A(r)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\left|\frac{x-x_0}{r}\right|^n.$$

注意到

$$\frac{1}{\left(1-\left|\frac{(x-x_0)}{r}\right|\right)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\left|\frac{x-x_0}{r}\right|^n,$$

就得到

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant k!\ r^{-k}\frac{A(r)}{\left(1-\frac{|x-x_0|}{r}\right)^{k+1}}=\frac{rA(r)k!}{(r-|x-x_0|)^{k+1}}.$$

推论 11.10 若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处解析,则存在 $r>0$,使得 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0+r) 内的任一点上都解析.

证明 由题设知,存在 $r>0$ 以及 $A(r)>0$,使得

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{rA(r)n!}{(r-|x-x_0|)^{n+1}},\quad x\in(x_0-r,x_0+r).$$

对任意取定的 $x_1\in(x_0-r,x_0+r)$,令

$$r_1=\frac{1}{2}\min\{|x_1-x_0|,r-|x_1-x_0|\},$$

易知 $(x_1-r_1,x_1+r_1)\subset(x_0-r,x_0+r)$.

现在设 $x:|x-x_1|<r_1$,此时 $x\in(x_0-r,x_0+r)$,且有 $|x_1-x_0|<r-r_1$. 因为

$$|x-x_0|-|x-x_1|\leqslant|x_1-x_0|<r-r_1,$$

所以 $0<r_1-|x-x_1|<r-|x-x_0|$. 从而得到

$$\frac{1}{(r-|x-x_0|)^{n+1}}<\frac{1}{(r_1-|x-x_1|)^{n+1}},\quad x\in(x_1-r_1,x_1+r_1).$$

由此可知,对 $x\in(x_1-r_1,x_1+r_1)$,有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant\frac{rA(r)n!}{(r-|x-x_0|)^{n+1}}<\frac{rA(r)n!}{(r_1-|x-x_1|)^{n+1}}$$

$$=\frac{r_1\left(\frac{r}{r_1}\right)A(r)n!}{(r_1-|x-x_1|)^{n+1}}=\frac{r_1B(r_1)n!}{(r_1-|x-x_1|)^{n+1}},$$

其中,$B(r_1)=\left(\frac{r}{r_1}\right)A(r)$. 即得所证.

注 美国数学月刊有文(88(1981),No. 1,p. 52)指出:"对任一实数列$\{a_n\}$,存在$f(x)$,使得$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$是$f(x)$的 Taylor 级数". 由此可知,任一幂级数总是某个函数的 Taylor 级数.

(七) 关于用 Taylor 展式求近似值

应用函数的 Taylor 展式求近似值时,由于有的级数收敛太慢,故常需再作进一步的展式.

例 4 对 $m=1,2,\cdots$, 有公式 $\ln(m+1)=\ln m+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}$.

证明 易知对$|x|<1$有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1.$$

从而令 $x=\frac{1}{2m+1}$,即得所证.

根据上一公式来计算对数的近似值,可较大地减少工作量. 不难推证其余项有估计

$$\left|2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\leqslant\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\ (0<x<1).$$

当 $x=\frac{1}{3}$ 即 $m=1$ 时,对 $n\geqslant5$,其余项不超过 10^{-5};当 $x=\frac{1}{5}$ 即 $m=2$ 时,对 $n\geqslant3$,其余项不超过 10^{-5},从而可知

$$\ln2\approx2\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\approx0.69315;$$

$$\ln3\approx\ln2+2\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}}\approx1.09861.$$

(八) 二项式$(1+x)^a$ Taylor 展式补充证明

为了考察二项式 Taylor 展式在 $x=-1,1$ 时的情形,先导入预备性结

果如下:

引理 11.3 设 n 是正整数,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\begin{cases}+\infty, & \alpha<-1,\\ 1, & \alpha=-1,\\ 0, & \alpha>-1.\end{cases}$

证明 (1) $\alpha<-1$,此时 $-(\alpha+1)>0$,且

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|=\frac{|\alpha+1-1|\,|\alpha+1-2|\cdots|\alpha+1-n|}{n!}$$

$$=(1-(\alpha+1))\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)$$

$$\geqslant 1-(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

$\left(\text{若 } a_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n),\text{则 } \prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)\geqslant 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)$由此即得所证.

(2) $\alpha=-1$.此时有

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|\binom{-1}{n}\right|=\left|\frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-n+1)}{n!}\right|$$

$$=\left|\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{n!}\right|=1.$$

由此即得所证.

(3) $\alpha>-1$.此时分两种情形讨论:

(A) $-1<\alpha<0$; (B) $\alpha\geqslant 0$.

在(A)的情形,有 $0<1+\alpha<1$,故

$$|\alpha-1|=1-\alpha,\ |\alpha-2|=2-\alpha,\cdots,|\alpha-n+1|=n-1-\alpha.$$

从而得

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\frac{|\alpha|\,|\alpha-1|\cdots|\alpha-n+1|}{n!}=\frac{(-\alpha)(1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!}$$

$$=\frac{(1-(\alpha+1))(2-(\alpha+1))\cdots(n-(\alpha+1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$$

$$=\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right).$$

因为 $0<\frac{\alpha+1}{n}\leqslant\alpha+1<1$,所以有

$$\left(\begin{array}{l}\text{注意,若 } 0<a_i<1\ (i=1,2,\cdots,n),\text{则}\\ \prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)<\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)}.\end{array}\right)$$

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\frac{1}{\left[1+(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]}.$$

由此即得所证.

在(B)的情形:下面证明$\binom{\alpha}{n}=O\left(\frac{1}{n}\right),(n\to\infty)$.

如果 α 是非负整数,那么对充分大的 $n:n>\alpha$,必有$\binom{\alpha}{n}=0$,结论显然成立.

如果 $0<\alpha<1$,那么

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\alpha\frac{|\alpha-1||\alpha-2|\cdots|\alpha-n+1|}{n!}<\alpha\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{n!}=\frac{\alpha}{n}.$$

如果 $\alpha>1$ 且不是整数,那么存在正整数 m,使得 $m<\alpha<m+1$. 此时取 $n:n>m+1$,就有

$$\begin{aligned}\left|\binom{\alpha}{n}\right|&=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)}{1\cdot 2\cdots(m+1)}\cdot\frac{(\alpha-m-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(m+2)(m+3)\cdots n}\right|\\&=\left|\binom{\alpha}{m+1}\right|\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)(m+3)\cdots n}\\&\leqslant\left|\binom{\alpha}{m+1}\right|\frac{(m+1)(m+2)\cdots(n-1)}{(m+2)(m+3)\cdots n}\\&=\left|\binom{\alpha}{m+1}\right|\frac{m+1}{n},\end{aligned}$$

也可写为$\left|\binom{\alpha}{n}\right|\leqslant\left|\binom{\alpha}{[\alpha]+1}\right|\frac{[\alpha]+1}{n}$. 由此即得所证.

关于组合数的演算,还有下述结果:

引理 11.4 对 $\alpha\in(-\infty,\infty)$,$n$ 是非负整数,有

$$1+\alpha+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}.$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+n-1}{k}=\binom{\alpha+n}{n}.$$

引理 11.5 对 $\alpha\in(-\infty,\infty)$,$k$ 是非负整数,有

$$\binom{-\alpha}{k}=(-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}.$$

推论 11.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha+n}{n}\right|=\begin{cases}\infty, & \alpha>0,\\ 1, & \alpha=0,\\ 0, & \alpha<0.\end{cases}$

推论 11.12

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}=\binom{n-\alpha}{n},\ \alpha\in(-\infty,\infty).$$

现在,可以考察二项式的 Taylor 展式在 $x=-1,1$ 处的收敛情况了:

(A) $x=-1$,此时展式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$.

因为(见推论 11.10 以及推论 11.11)我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\binom{n-\alpha}{n}=\begin{cases}+\infty, & \alpha<0,\\ 0, & \alpha>0.\end{cases}$$

所以得到 $\alpha>0$ 时,展式收敛,且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}=0=(1+(-1))^\alpha;$$

而 $\alpha<0$ 时,发散.

(B) $x=1$,此时展式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}$.

由引理 11.3 可知,当 $\alpha\leqslant-1$ 时,发散.

对于 $\alpha>-1$,应用 Taylor 公式

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+R_n(x),R_n(x)=\binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-\alpha}},$$

$$0<\xi<x\leqslant1,n+1-\alpha>0.$$

知

$$|R_n(x)|\leqslant\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|x^{n+1},\ 0<x\leqslant1.$$

因为 $\binom{\alpha}{n+1}\to0\ (n\to\infty,\alpha>-1)$,所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(1)=0\quad(\alpha>-1)$.

这说明 $\alpha>-1$ 时,级数收敛,且有

$$2^\alpha=(1+1)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n},\alpha>-1.$$

(九) 关于多项式列一致逼近连续函数

(1) 若 $f\in C([a,b])$,则存在多项式列 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$,且有 $P_n(x)\leqslant P_{n+1}(x)$.

(2) 设 $f\in C([0,1])$. 则存在奇次多项式列 $\{P_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$

当且仅当 $f(0)=0$.

(3) 设$\{g_n(x)\}$是$[0,1]$上非负连续函数列,且存在

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^k g_n(x)\mathrm{d}x \text{ (对一切 } k=0,1,\cdots),$$

则对任意的 $f\in C([0,1])$,存在

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g_n(x)\mathrm{d}x .$$

(4) 设 $f\in C([0,1])$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k x^{4k};C_k\in Q \quad (k=0,1,\cdots,n),$$

使得 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$.

(十) 关于原函数的补充

(1) 即使在$[0,1]$上有原函数,然而$|f(x)|$以及$\dfrac{1}{f(x)}$在$[0,1]$上也不一定有原函数.

(2) (参阅§5 思考练习第 5 题) 设$f(x)$在$[a,b]$上有原函数,$g\in C([a,b])$,但乘积$f(x)\cdot g(x)$在$[a,b]$上也不一定有原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

第十二章 Fourier 分析初步

上一章论述的幂级数是由幂函数系组成的,本章所要介绍的主题是,用三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

来代替幂函数系,用三角级数

$$\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

代替幂级数,讨论一个函数何时能用一个三角级数表达出来,又有些什么功能?

如果一个函数能用一类有规律的简单初等函数通过加法运算(包括其他简洁运算)整齐地表示出来,当然是一种非常理想的事.如同幂级数展开中所见,这对于研究函数性质,以及求解各种有关课题是多么方便和有效.不过,能展成幂级数的函数,首先要求该函数有充分的光滑性,即必须具备任意次可微性.而用三角级数来表达一个函数时,在下文中将指出,对函数本身的要求是比较低的.从这一意义上讲,本章所阐述的理论所适应的对象更加广泛,虽然两者的应用范围不尽相同.

从物理的角度来分析,在自然现象或科学与工程技术的课题中,会常遇到或分析出某种变化的周期现象.最简单的周期现象,如简谐振动,可用一个正弦量 $A\sin(\omega t+\theta_0)$ 来描述,其中 A 称为振幅,表示振动幅度的最大值,ω 称为角频率,它与周期 T 有关系:

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

θ_0 是初位相,描述初始时的位置.进一步还知道,由各种倍数频率的正弦函数合成线性组合:

$$A_1+A_1\sin(\omega t+\theta_1)+A_2\sin(2\omega t+\theta_2)+\cdots+A_n\sin(n\omega t+\theta_n),$$

它仍是一个周期函数.即由不同倍频的正弦量迭加而成的量仍是一个周期运动.引用三角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

上述线性组合也可写为

$$a_0+(a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t)+(a_2\cos2\omega t+b_2\sin2\omega t)+\cdots$$
$$+(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t).$$

甚至于考察所有 ω 倍频迭加而成的级数

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),$$

在级数收敛的情况下,也可描述周期现象.

现在的问题是:一个周期为 T 的周期量,是否可用某个基本频率 ω 以及各种倍频的简谐量迭加而成.若记 $x=\omega t$,这就是一个周期函数展成三角级数的问题.Fourier 级数已成为研究周期现象(各种振动、行星运动、波动与通讯等)不可或缺的工具.(特别是在天文学理论中,这是因为许多天体现象具有周期性.Euler 在 1747 年研究行星扰动时,就曾得到过一个函数的三角级数表示.d'Alembert 在探求两行星间的距离问题时,也用过两向径间夹角的余弦级数)

§1 三角函数系的正交性,函数的 Fourier 级数

我们称函数列

$$1,\cos x,\sin x,\cos2x,\sin2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

为**三角函数系**,其有限线性组合

$$\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\quad(n=1,2,\cdots)$$

称为**三角多项式**,而称级数

$$\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx) \tag{①}$$

为**三角级数**,其中常数 α_0,α_n 与 $\beta_n(n=1,2,\cdots)$ 称为该三角级数的系数.

本章要讨论的问题是:给定一个函数 $f(x)$,在什么条件下,可以找到一个三角级数,它收敛到 $f(x)$,其间也涉及它的应用.

为此,首先我们知道,当 $f(x)$ 可用①表达时,$f(x)$ 必是以 2π 为周期的周期函数.

其次,对①作一剖析,可知它是由两个部分组成,其一是三角函数系,其二是系数 α_0,α_n 与 $\beta_n(n=1,2,\cdots)$. 因此,让我们分别对它们作一番初步的考察.

(一) 三角函数系的正交性

我们发现三角函数系作为一个整体,除了具有 2π 周期性外,其相互间还具有一种被称为"正交"的性质(比拟欧氏空间两向量的内积为零),即

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\mathrm{d}x\\&=0\quad(n\neq m;n,m=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

借助于公式 $(n,m=1,2,\cdots)$

$$\cos nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}[\sin(n+m)x-\sin(n-m)x];$$

$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}[-\cos(n+m)x+\cos(n-m)x],$$

经计算又可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mx\mathrm{d}x=0;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x=0.\ (n\neq m)$$

(二) Fourier 级数的形成

(一)中所述这种(积分)正交性,为三角级数的积分运算的简化提供了条件.也就是说,如果可积函数$f(x)$有展式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad ②$$

而且假定可以进行逐项积分(例如在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛条件下),那么在②式两端作$[-\pi,\pi]$上的积分,可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\pi a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right\}=\pi a_0.$$

由此可知系数 a_0 与$f(x)$之间的关系.

同理,根据三角函数系的正交性,在等式

$$f(x)\cos mx=\frac{a_0}{2}\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx)$$

$(m=1,2,\cdots)$两端作积分,可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\right\}$$

$$=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x=a_m\pi,\ (m=1,2,\cdots).$$

在等式$(m=1,2,\cdots)$

$$f(x)\sin mx=\frac{a_0}{2}\sin mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cdot\sin mx+b_n\sin nx\sin mx)$$

的两端作积分,可算出

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$=b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,\mathrm{d}x=b_m\pi\ (m=1,2,\cdots).$$

由此可知 $a_n, b_n (n=1,2,\cdots)$ 与 $f(x)$ 的关系.

据上所述，在一定的条件下 $f(x)$ 展成三角级数，其系数与 $f(x)$ 的关系由下述公式确定：

$$a_0(f)=a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x;$$

$$a_n(f)=a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n(f)=b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).\qquad ③$$

(称为 **Euler-Fourier 公式**，由 Euler 首先提出)

于是，用这些公式确定的 a_0, a_n 与 $b_n (n=1,2,\cdots)$ 作为系数的三角级数引起了人们极大的兴趣，并称这样的三角级数为(可积函数) $f(x)$(生成)的 **Fourier 级数**，形式地记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

此时的 a_0, a_n 与 $b_n (n=1,2,\cdots)$ 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 系数**.

例 1 如图 12-1 所示，设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且有

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant 0,\\ x & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

求其 Fourier 级数.

解 易知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，且有

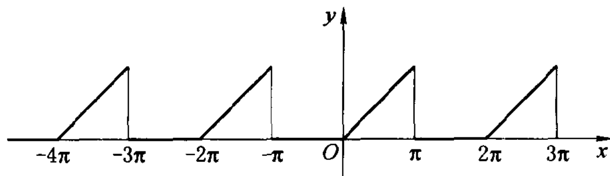


图 12-1

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0\cdot \mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\bigg|_0^{\pi}=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数},\\ -\dfrac{2}{n^2\pi}, & n\text{ 是奇数};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\cos n\pi}{n}=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}, & n\text{ 是偶数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

从而得

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

注 从$f(x)$组成 Fourier 级数的观点看,只需计算 Fourier 系数时的积分存在即可.因此,如果$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有瑕点,但在$[-\pi,\pi]$上绝对可积,仍可组成 Fourier 级数.这里只需注意

$$\left.\begin{array}{l}|f(x)\cos nx|\\ |f(x)\sin nx|\end{array}\right\}\leqslant|f(x)|\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

即可.

定理 12.1 如果在等式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的右端的三角级数在$[-\pi,\pi]$上是一致收敛于$f(x)$的,那么该三角级数必是$f(x)$的 Fourier 级数,即

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad (n=1,2,\cdots).$$

证明 由于此三角级数的一致收敛性,故可知其和函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,且在$[-\pi,\pi]$上的积分可逐项进行. 从而由前面的演算可知结论成立.

§ 2 Fourier 系数的性质

在论述 Fourier 级数的收敛问题以前,让我们先来探讨一下 Fourier 系数的若干性质,这将有助于我们对 Fourier 级数的进一步认识. 下文中谈到函数的 Fourier 级数或系数时,总假定它是以2π为周期的函数,且在$[-\pi,\pi]$上可积(或反常绝对可积).

定理 12.2 设$f(x)$的 Fourier 系数为$a_0, a_n, b_n, (n=1,2,\cdots)$则

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots);$$

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

证明 以b_n为例,我们有

$$|b_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

定理 12.3 记$f(x), g(x)$的 Fourier 系数各为$\{a_n(f), b_n(f)\}, \{a_n(g), b_n(g)\}$,则$\alpha f(x)+\beta g(x)$的 Fourier 系数为
$\alpha a_n(f)+\beta a_n(g)\ (n=0,1,2,\cdots); \alpha b_n(f)+\beta b_n(g)\ (n=1,2,\cdots)$.

证明 略.

定理 12.4 (1) 若$f(x)$是奇函数,则$a_n(f)=0\ (n=0,1,2,\cdots)$.
(此时,其 Fourier 级数称为 **Fourier 正弦级数**)

(2) 若$f(x)$是偶函数,则$b_n(f)=0\ (n=1,2,\cdots)$.
(此时,称其 Fourier 级数为 **Fourier 余弦级数**)

证明 (1) 注意到$f(x)$与$f(x)\cos nx\ (n=1,2,\cdots)$是奇函数,从而有

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots);$$

(2) 注意到$f(x)\sin nx\ (n=1,2,\cdots)$是奇函数,从而有

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\ (n=1,2,\cdots).$$

例 1 设$f(x)$是以2π为周期的函数,且有

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in[0,2\pi),$$

则其 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

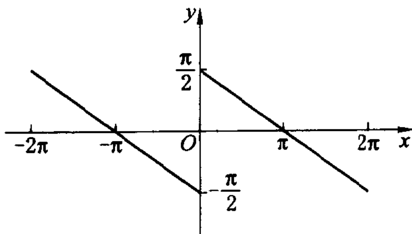


图 12-2

证明 易知(图12-2) $f(x)$是奇函数,因此 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$. 又对 $n=1,2,\cdots$,有

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n\pi}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

例 2 设$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

(1) 若$f(x)$的函数图形是关于 $x=\frac{\pi}{2}$是轴对称的,则 $b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

(2) 若$f(x)$的函数图形是关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称的,则 $b_{2n-1}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

证明 (1) 依题设知 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$,或 $f(\pi-x)=f(x)$,从而有

$$\begin{aligned}b_{2n}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\pi-x)\sin 2nx\mathrm{d}x\\&=\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin 2nt\mathrm{d}t=-b_{2n},\end{aligned}$$

故得 $b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

(2) 依题设知 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 或 $f(\pi-x)=-f(x)$. 从而有

$$\begin{aligned}b_{2n-1}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\pi-x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(2n-1)t\mathrm{d}t=-b_{2n-1}.\end{aligned}$$

故得 $b_{2n-1}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

定理 12.5 若记 $f_h(x)=f(x+h), h\in(-\infty,\infty)$, 则 $f_h(x)$ 与 $f(x)$ 的 Fourier 系数有下述关系:

$$\begin{cases}a_0(f_h)=a_0(f),\\a_n(f_h)=a_n(f)\cos nh+b_n(f)\sin nh\ (n=1,2,\cdots),\\b_n(f_h)=b_n(f)\cos nh-a_n(f)\sin nh\ (n=1,2,\cdots).\end{cases}\qquad①$$

证明 以 $b_n(f_h)$ 为例,我们有

$$\begin{aligned}b_n(f_h)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)\sin(nt-nh)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\sin nt\cos nh-\cos nt\sin nh)\mathrm{d}t\\&=\frac{\cos nh}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t-\frac{\sin nh}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t\\&=b_n(f)\cos nh-a_n(f)\sin nh\ (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

定理 12.6 设 $a_0, a_n, b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0;\ \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

证明 (1) 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积时,上述结论是 Riemann-Lebesgue 引理:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\begin{pmatrix}\cos\lambda x\\\sin\lambda x\end{pmatrix}\mathrm{d}x=0$$

的推论.

(2) 在$f(x)$具有有限个瑕点且又绝对可积的情形,实际上,此时 Riemann-Lebesgue 引理的推广形式也成立. 为证此,不妨设 $x=b$ 是$f(x)$的唯一瑕点,对任给 $\varepsilon>0$,由绝对可积性知道,存在 $\delta>0$,使得

$$\left|\int_{b-\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

此外,对取定的 $\delta>0$, $f\in R([a,b-\delta])$,因此根据 Riemann-Lebesgue 引理可知,存在 $\lambda_0>0$,使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有

$$\left|\int_{a}^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而可知当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| = \left|\left\{\int_{a}^{b-\delta} + \int_{b-\delta}^{b}\right\} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{a}^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| + \int_{b-\delta}^{b} |f(x)\cos\lambda x|\mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这说明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

同理可证

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

注 当一个周期函数能够展成 Fourier 级数时,在实际背景中,也可以说成是一个周期信号或振动波形被分解为各种频率(基频的整数倍)的简谐分量的迭加. 因此,$a_n\to 0$, $b_n\to 0$ $(n\to\infty)$说明,其高频($n\omega$)分量的振幅是很小的,即高频分量对整体波形的影响很小.

下例说明,Fourier 系数趋于零的速度,随着函数的光滑性

程度加强而增大.

例3 (1) 设 $f\in C((-\infty,\infty))$. 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微,且 $f'\in R([-\pi,\pi])$,则

$$a_n(f)=-\frac{b_n(f')}{n},\quad b_n(f)=\frac{a_n(f')}{n}\quad (n=1,2,\cdots).$$

(2) 设 $f\in C^{(m-1)}((-\infty,\infty))$,若 $f^{(m)}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上存在,且 $f^{(m)}\in R([-\pi,\pi])$,则

$$|a_n(f)|+|b_n(f)|\leqslant\frac{|a_n(f^{(m)})|+|b_n(f^{(m)})|}{n^m}\quad (n=1,2,\cdots).$$

证明 (1) 由等式

$$\begin{aligned}b_n(f')&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}f(x)\\&=\frac{1}{\pi}[f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-na_n(f)\quad (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

即得所证.

同理可证 $a_n(f')=nb_n(f)$ $(n=1,2,\cdots)$.

(2) 逐次应用(1)之推理即得.

注 上述例中,对函数的可微性要求可减至逐段可微.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

(1) 试求 $F(x)=f(-x)$ 的 Fourier 系数.

(2) 若 $f(x)$ 的图形关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称且是偶函数,试求 $a_n,b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 的形式.

(3) 若 $f(x)$ 的图形是关于点 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称的,试证明 $a_n=0,b_{2n-1}=0(n=0,1,2,\cdots)$.

(4) 若 $f(x+\pi)=f(x)$,试证明 $a_{2n-1}=0,b_{2n-1}=0$ $(n=1,2,\cdots)$.

(5) 试求$f(x)\sin x$的 Fourier 系数.

2. 设 $a_0, a_n, b_n (n=1,2,\cdots)$为$f(x)$的 Fourier 系数. 若$f(x)$是$(0,2\pi)$上的递减函数,试证明 $b_n \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$.(提示:定义 $f(0)=f(0+)$,$f(2\pi)=f(2\pi-)$,并应用第二积分中值公式)

3. 设积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$存在,试证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$.

§ 3 Fourier 级数的(点)收敛

3.1 Dirichlet 积分、局部化原理

设$f(x)$是以 2π 为周期的可积函数,我们的问题是,在什么条件下,$f(x)$的 Fourier 级数在点 $x_0\in[-\pi,\pi]$处收敛? 且其极限值是什么? 为此,在原则上,自然应从其部分和

$$\begin{aligned}S_n(f,x_0)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\cdot\cos kx_0\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\cdot\sin kx_0\right\}\end{aligned}$$

的性态开始研究.

引理 12.1 记 $D_n(x)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$,则

$$S_n(f,x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(x-x_0)\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots).\quad ①$$

($D_n(x)$称为 **Dirichlet 核**,式①称为$f(x)$的 **Dirichlet 积分**)

证明 注意到三角公式

$$\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0=\cos k(x-x_0);$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$\left(\text{当 } x=0 \text{ 时,设定右端之值为 } n+\frac{1}{2}\right)$我们有

$$\begin{aligned}
&S_n(f,x_0)\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\{\cos kx\cos kx_0\\
&\quad+\sin kx\sin kx_0\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos k(x-x_0)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(x-x_0)\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

引理 12.2 $f(x)$的 Fourier 级数的部分和可表成

$$S_n(f,x_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}D_n(x)\mathrm{d}x$$
$$(n=0,1,2,\cdots). \tag{②}$$

证明 在式①的积分中用变量替换 $x=x_0+t$,并注意被积函数具有以 2π 为周期的性质,易知

$$S_n(f,x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)D_n(t)\mathrm{d}t.$$

此外,因为在 $t=-x$ 的替换下又有

$$\int_{-\pi}^{0}f(x_0+t)D_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f(x_0-x)D_n(x)\mathrm{d}x,$$

所以又可得

$$\begin{aligned}
S_n(f,x_0)&=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}\right\}f(x_0+t)D_n(t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x_0-x)+f(x_0+x)\}D_n(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

即得所证.

推论 12.1 Dirichlet 核的积分具有性质:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x=1,\ \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x=1.$$

证明 取$f(x)=1, x\in(-\infty,\infty)$,则易知其 Fourier 系数为

$$a_0=2, a_n=b_n=0\ (n=1,2,\cdots).$$

由此得 $S_n(f,x_0)=1$,而式①及②化为

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-x_0)\mathrm{d}x,\ 1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(x)\mathrm{d}x,$$

即得所证.

引理 12.2 说明,$f(x)$的 Fourier 级数在点 $x=x_0$ 处的收敛问题,就是要研究极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}D_n(x)\mathrm{d}x$$

存在以及等于什么的问题? 为此,记

$$\varphi(x_0,x)=\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2},$$

($\varphi(x_0,x)$是关于 x 在$[0,\pi]$上的可积函数)则$f(x)$的 Fourier 级数在点 $x=x_0$ 处收敛的问题就是存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\varphi(x_0,x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \qquad ③$$

的问题.

下述著名结论指出这一条件可进一步化简:

定理 12.7(Riemann 局部化原理) $f(x)$的 Fourier 级数在 $x_0\in[-\pi,\pi]$处收敛的充分必要条件是:可取 δ:$0<\delta<\pi$,存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\delta}\varphi(x_0,x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x. \qquad ④$$

证明 (1) 因为函数$\dfrac{\varphi(x_0,x)}{2\sin\frac{x}{2}}$在$[\delta,\pi]$上可积,所以由 Riemann-Lebesgue 引理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \frac{\varphi(x_0,x)}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0.$$

从而其充分必要条件③就化为存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi(x_0,x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x. \qquad ⑤$$

(2) 注意到极限

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}}=0,$$

可知函数$\left\{\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right\}$在$[0,\delta]$上可积. 从而由 Riemann-Lebesgue 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi(x_0,x)\left\{\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{x}\right\}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0.$$

即得所证.

注 Riemann 定理的这一结论指出,$f(x)$的 Fourier 级数在点 x_0 处是否收敛仅与被积函数在$[0,\delta]$上的性态有关. 考虑到被积函数是 $\varphi(x_0,x)=\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}$,那么其收敛性仅与被积函数 φ 在点 x_0 附近的值有关,此即所谓局部化之意. 这一成果的惊人之处在于,$f(x)$的 Fourier 系数却是要由$f(x)$在整个$[-\pi,\pi]$上的值来确定的.

3.2 Fourier 级数收敛的判别法

根据 Riemann 局部化定理,可知形如

$$\int_0^\delta \varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$$

的积分在 Fourier 级数的收敛理论中扮演着重要角色，且可由 $\varphi(x)$所具有不同性质而导出不同的收敛条件. 下面总还是假定 $f\in R([-\pi,\pi])$，且是以 2π 为周期的函数.

定理 12.8(Dini 判别法) (1) 设 $\varphi(x)$在$[0,\delta]$上可积，而且在 $x=0$ 处存在右极限 $\varphi(0+)$：若存在积分

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(x)-\varphi(0+)}{x}\mathrm{d}x, \qquad ①$$

则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta \varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\varphi(0+). \qquad ②$$

(2) 对于 $\varphi(x_0,x)=\dfrac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}$，假定点 x_0 是函数$f(x)$的第一类间断点，即存在

$$\lim_{x\to0+}\varphi(x_0,x)=\varphi(x_0,0+)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

若存在积分

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(x_0,x)-\varphi(x_0,0+)}{x}\mathrm{d}x, \qquad ③$$

则函数 f 的 Fourier 级数在点 x_0 收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x_0)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$$

证明 (1) 将式②中积分改写为

$$\int_0^\delta \varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\delta \frac{\varphi(x)-\varphi(0+)}{x}\sin\lambda x\mathrm{d}x+\varphi(0+)\int_0^\delta \frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x.$$

对上式右端第二个积分，易知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(0+)\int_0^\delta \frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\varphi(0+)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}\varphi(0+);$$

对上式右端第一个积分，根据条件①，应用 Riemann-Lebesgue 引理，可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta \frac{\varphi(x)-\varphi(0+)}{x}\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

即得所证.

(2) 只需视(1)中之 $\varphi(x)=\varphi(x_0,x)$, $\varphi(0+)=\varphi(x_0,0+)$ 即可.

下面介绍能满足条件③的具体函数类. 为此,引进广义左、右导数的概念.

定义 12.1 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右极限 $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ 存在,若极限

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-)}{h}\overset{\text{def}}{=\!=}\overline{D}_-f(x_0),$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+)}{h}\overset{\text{def}}{=\!=}\overline{D}_+f(x_0)$$

存在,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**左、右广义导数存在**,其值各为 $\overline{D}_-f(x_0)$, $\overline{D}_+f(x_0)$.

显然,若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在左、右导数 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$,则

$$\overline{D}_-f(x_0)=f'_-(x_0),\quad \overline{D}_+f(x_0)=f'_+(x_0).$$

推论 12.2 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左、右广义导数存在,则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=x_0$ 处收敛,且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

证明 只需检验 Dini 判别法中(2)的条件. 因为我们有

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0,x)-\varphi(x_0,0+)\\&=\frac{f(x_0+x)-f(x_0+)}{2}+\frac{f(x_0-x)-f(x_0-)}{2},\end{aligned}$$

并注意到左、右广义导数的存在性,所以极限

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0+}\frac{\varphi(x_0,x)-\varphi(x_0,0+)}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(x_0+x)-f(x_0+)}{x}+\frac{f(x_0-x)-f(x_0-)}{x}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to0+}\frac{f(x_0+x)-f(x_0+)}{x}-\lim_{x\to0-}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-)}{x}\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\{\overline{D}_+ f(x_0)-\overline{D}_- f(x_0)\}$$

存在.这表明$\frac{\varphi(x_0,x)-\varphi(x_0+)}{x}$在$[0,\delta]$上可积,故条件③成立,即得所证.

推论12.3 若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上逐段可微,则$f(x)$的Fourier级数在$[-\pi,\pi]$内的每一点x上均收敛于$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$,而在$x=-\pi$以及$x=\pi$上,它收敛于$\frac{f((-\pi)+)+f(\pi-)}{2}$.

推论12.4 若$f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的逐段可微的连续函数,则$f(x)$的Fourier级数在$(-\pi,\pi)$内的每一点x上均收敛于$f(x)$,而在$x=-\pi$以及$x=\pi$上,它收敛于$\frac{f((-\pi)+)+f(\pi-)}{2}$.

注 若Dini定理中的$\varphi(x)$是具有瑕点的绝对可积函数,则条件③应改为

$$\int_0^\delta\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0+)}{x}\right|\mathrm{d}x<+\infty.$$

例1 本章§2中例1对以2π为周期的函数$f(x)\left(f(x)=\frac{\pi-x}{2},x\in[0,2\pi)\right)$,得到其Fourier级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.现在根据Dini判别法,并注意到$f(x)$在$x=0$处为第一类间断点,且有

$$\frac{f(0-)+f(0+)}{2}=0.$$

可知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & 0<x<2\pi,\\ 0, & x=0\text{ 或 }2\pi.\end{cases}$$

此外,以$x=2t(0<t<\pi)$代入,并以2除两端可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\quad(0<t<\pi).$$

若在$0<x<\pi$上,与前式相减,又得

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<x<\pi).$$

再取 $x=\frac{\pi}{2}$,我们有等式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

而取 $x=\frac{\pi}{3}$,又有等式

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots.$$

引理 12.3(Jordan①) 若 $\varphi(x)$在$[0,\delta]$上单调,则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(x)-\varphi(0+)}{x}\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证明 不妨假定 $\varphi(x)$是递增函数.

(1) 对任给 $\varepsilon>0$,由题设知存在 $\delta':0<\delta'<\delta$,使得

$$0\leqslant\varphi(x)-\varphi(0+)<\varepsilon,0<x<\delta'.$$

应用积分第二中值定理,并注意到存在 $M>0$,使得

$$\left|\int_0^t\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant M,\ t\in(0,\infty),$$

我们有

$$\left|\int_0^{\delta'}[\varphi(x)-\varphi(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|[\varphi(\delta')-\varphi(0+)]\int_{\xi}^{\delta'}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|[\varphi(\delta')-\varphi(0+)]\int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta'}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon\left\{\left|\int_0^{\lambda\delta'}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\right.$$

$$\left.+\left|\int_0^{\lambda\xi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\right\}\leqslant 2M\varepsilon.$$

(2) 对上述取定的 δ',在$[\delta',\delta]$上函数$\frac{\varphi(x)-\varphi(0+)}{x}$是可积的,故根据 Riemann-Lebesgue 引理可知,存在 $\lambda_0>0$,当 $\lambda>\lambda_0$ 时,

$$\int_{\delta'}^{\delta}[\varphi(x)-\varphi(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

---

① 若尔当(1838~1922),法国数学家.

综合上述结果,可知当 $\lambda>\lambda_0$ 时,有

$$0<\int_0^{\delta}[\varphi(x)-\varphi(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\left\{\int_0^{\delta'}+\int_{\delta'}^{\delta}\right\}[\varphi(x)-\varphi(0+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

即得所证.

定理 12.9(Jordan) (1) 若 $\varphi(x)$在$[0,\delta]$上单调,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\varphi(0+).$$

(2) 若$f(x)$是$[-\pi,\pi)$上的逐段单调,则对 $x_0\in[-\pi,\pi]$,有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x_0)=\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

证明 (1) 不妨假定 $\varphi(x)$在$[0,\delta]$上递增,则由

$$\int_0^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}t=\int_0^{\delta}\varphi(0+)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\delta}\frac{[\varphi(x)-\varphi(0+)]}{x}\cdot\sin\lambda x\mathrm{d}x,$$

以及注意到引理 12.3,可知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\delta}\varphi(0+)\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(0+)\int_0^{\delta}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\varphi(0+)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\varphi(0+).$$

(2) 根据(1),只需令

$$\varphi(x)=\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2},\varphi(0+)=\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2},$$

而 $\lambda=n+\frac{1}{2}$即可.

如果函数$f(x)$的 Fourier 级数在某个区间 I 上收敛于$f(x)$,即等式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in I$$

成立,则称此 Fourier 级数为$f(x)$(在 I 上)的 **Fourier 级数展式**,或称为$f(x)$在 I 上有 Fourier 级数展式(右端).

例2 求周期为 2π 的函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

的 Fourier 级数展式.

解 易知该函数图形为

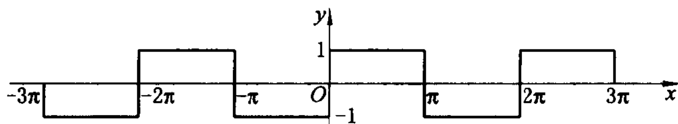


图 12-3

且是逐段单调的,其不连续点在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处.因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\right]=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right]=0;(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数},\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

所以我们有

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left\{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\right\}.$$

图 12-4 示意该 Fourier 级数部分和逐步逼近函数$f(x)$的情景:

例3 如图 12-4 所示,求下列周期为 2π 的函数的 Fourier 级数展式,继而证明相应的数值级数的和:

(1) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x<0,\\ \pi-x, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$

(2) $f(x)=\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)^2, 0\leqslant x<2\pi.$

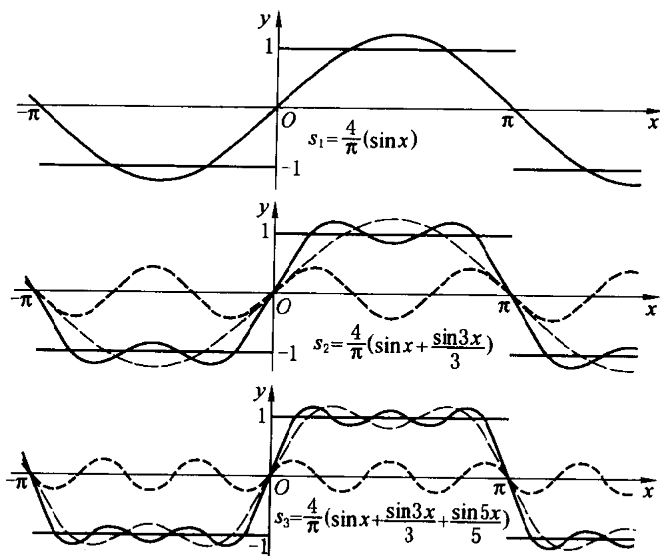
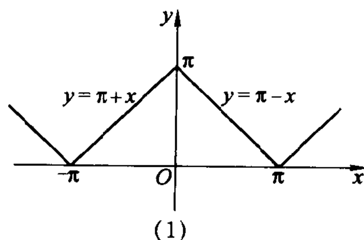


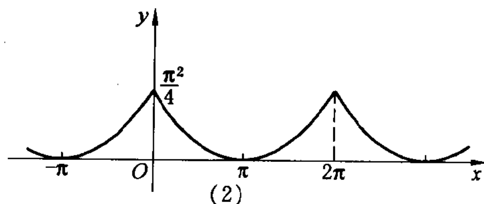
图 12-4

(A) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$; (B) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$;

(C) $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.



(1)



(2)

图 12-5

解 (1) 此函数为$(-\infty,\infty)$上的逐段可微的连续偶函数，故 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$. 又有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\mathrm{d}x=\pi;$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n),\ (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

从而我们有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

当 $x=0$ 时，$f(0)=\pi$，故知

$$\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right),$$

即得(A)式.

(2) 这是一个逐段可微的连续偶函数，故知

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots).$$

对于 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$，我们有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6};$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

从而可知

$$\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

当 $x=0$ 时，可得到

$$f(0)=\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \text{(B)成立}.$$

当 $x=\pi$ 时,得到

$$f(\pi)=0=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\left(-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots\right),\ \text{(C)成立.}$$

例 4* 求在 $|r|<1$ 时周期函数

$$f(x)=\frac{r+\cos x}{1+2r\cos x+r^2}$$

的 Fourier 级数.

解 因为对 $|r|<1$,有

$$1+2r\cos x+r^2\geqslant 1-2|r|\cos x|+r^2$$

$$\geqslant 1-2|r|+r^2=(1-|r|)^2>0,$$

所以 $f(x)$ 是 x 的连续函数.

借助于复数表示式并作变量替换,有

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{t^2+1}{2t},\quad t=e^{ix},$$

从而可得

$$\frac{r+\cos x}{1+2r\cos x+r^2}=\frac{t^2+2rt+1}{2[rt^2+(1+r^2)t+r]}$$

$$=\frac{t(t+r)+(1+rt)}{2(t+r)(1+rt)}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+rt}+\frac{1}{t+r}\right).$$

由于 $|t|=|e^{ix}|=1,|r|<1$,故有展式

$$\frac{t}{1+rt}=\frac{1}{r}\frac{rt}{1+rt}=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(rt)^n;$$

$$\frac{1}{t+r}=\frac{1}{r}\frac{\left(\frac{r}{t}\right)}{1+\left(\frac{r}{t}\right)}=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{r}{t}\right)^n.$$

从而可知

$$\frac{r+\cos x}{1+2r\cos x+r^2}=\frac{1}{2r}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{t^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^nt^n\right\}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n+t^{-n}}{2}r^n=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\cos nx.$$

注意到上式尾端之级数是一致收敛的($|r|<1$),这说明此级数就是左端函数的 Fourier 级数.

类似地,我们有

$$\frac{r\sin x}{1+2r\cos x+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\sin nx,\ |r|<1.$$

例 5 求在$-1<r<1$时函数

$$f(x)=\arctan\left(\frac{r\sin x}{1+r\cos x}\right)$$

的 Fourier 展式.

解 由于$f(x)$是奇函数,故 $a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$,又有

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\arctan\frac{r\sin x}{1+r\cos x}\right)\sin nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{2\cos nx}{n\pi}\arctan\frac{r\sin x}{1+r\cos x}\bigg|_0^{\pi}\\&\quad+\frac{2r}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{r+\cos x}{1+2r\cos x+r^2}\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}r^k\cos kx\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}r^k\int_0^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n}r^n\\&\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由此知

$$\arctan\left(\frac{r\sin x}{1+r\cos x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\frac{\sin nx}{n}.$$

例 6* 求函数

$$f(x)=\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|,x\neq(2m+1)\pi\ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的 Fourier 级数展式.

解 因为是偶函数,所以

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots).$$

对于 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$的计算,我们有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln 2dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx.$$

在第二个积分中作变量替换 $x=\pi-t$, 易知 $a_0=0$. $\left(\text{注意}\right.$ $\left.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)$

应用分部积分公式以及变量替换 $x=\pi-t$,可得

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx.$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt\ (n=1,2,\cdots).$$

引用公式

$$\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}};$$

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx;\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx,$$

可知 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ (n=1,2,\cdots)$. 最后得到

$$\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列函数的 Fourier 级数:

(1) $\sin^2 x$. (2) $T_n(x)=\alpha_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$.

(3) $x\sin x,[-\pi,\pi]$. (4) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

2. 试证明下列等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

(提示:逐项求导)

3. 试问下列三角级数是某个函数的 Fourier 级数吗?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}\ (\alpha>1)$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

4. 设 e^x 在 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 系数为 a_0,a_n,b_n,试求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{2n+1}\cos(2n+1)x+b_{2n+1}\sin(2n+1)x)$$

的和$\left(提示:\dfrac{e^x-e^{x+\pi}}{2}\right)$.

5. 对于在(a,b)上有定义的函数$f(x)$,若$f(a+)$存在,且又存在 $M>0,\delta>0,\alpha>0$,使得

$$|f(a+x)-f(a+)|<Mx^{\alpha},0<x<\delta,$$

则称$f(x)$在点 a 处满足**右 Lipschitz(α)条件.**

设对任给 $\varepsilon>0,\varphi\in R([\varepsilon,b])$. 若 $\varphi(x)$在点 $x=0$ 处满足在 Lipschitz(α)条件,试证明积分

$$\int_a^b\frac{|\varphi(x)-\varphi(0+)|}{x}dx$$

存在.

6. (Lipschitz 判别法)设$f(x)$是周期为 2π 的函数,$x_0\in[-\pi,\pi]$. 若存在 $M>0,\delta>0,0<\alpha\leqslant 1$,使得

$$|f(x_0+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha},\quad -\delta<h<\delta,$$

试证明

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x_0)=f(x_0).$$

§4 其他函数的 Fourier 级数

借助于 Fourier 级数的收敛定理,对于不以 2π 为周期的周期函数,以及只在某区间上定义的函数,我们可以用变量替换,以及周期延拓的方法将其展成 Fourier 级数.

4.1 周期为 $2l$ 的函数

自然界以及工程技术中所呈现的周期现象,其运动、变化的回复时间可以是各种各样的. 因此,用周期函数表示时,其周期就不一定是 2π. 为简便起见,设 $f(x)$ 是以 $2l(l>0)$ 为周期的周期函数,且 $f\in R([-l,l])$,则其 Fourier 系数为

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\end{cases}\quad (n=0,1,2,\cdots).\qquad ①$$

若在点 $x=x_0\in[-l,l]$处,$f(x)$满足收敛条件,则其 Fourier 级数满足

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x_0+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x_0\right)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.\qquad ②$$

为证明这一结论,作变量替换 $t=\dfrac{\pi x}{l}$,则当 x 从 $-l$ 变到 l 时,t 从 $-\pi$ 变到 π,若记

$$g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=f(x),$$

则 $g\in R([-\pi,\pi])$. 由第七章 6.1 节的换元积分法可知,当 $f\in$

$R([a,b])$, $\varphi'\in R([\alpha,\beta])$ 且 $\varphi'(t)>0$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ 时, $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上可积. 在这里 $\varphi(t)=\frac{l}{\pi}t$, $\varphi'(t)=\frac{l}{\pi}>0$. 故 $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\frac{l}{\pi}$在$[-l,l]$上可积,即 $g\in R([-l,l])$. 又 $g(t)$的周期成为 2π, 这只需注意到 $g(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t)$. 我们有

$$a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\ (n=0,1,2,\cdots);$$
$$b_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin nt\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此,在 $t_0=\frac{\pi x_0}{l}\in[-\pi,\pi]$处,有

$$\frac{a_0(g)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(g)\cos nt_0+b_n(g)\sin nt_0)=\frac{g(t_0-)+g(t_0+)}{2}.$$

再将 t_0 换回 x_0,即得

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x_0+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x_0\right)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

例 1 设$f(x)$是以 2 为周期的周期函数,且有

$$f(x)=x^2,x\in[-1,1],$$

求其 Fourier 展式.

解 易知$f(x)$是偶函数,故可得

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

又注意到公式①中之 $l=1$,我们有

$$a_0=2\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3};$$

$$a_n=2\int_0^1x^2\cos n\pi x\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2\pi^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因为$f(x)$满足 Dini 条件,且为连续函数,所以对任意的 $x\in(-\infty,\infty)$,有

$$x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.$$

4.2 仅定义在有界区间上的函数

到目前为止,我们所讨论的对象都是周期函数. 对于仅在区间$[a,b]$上定义而无周期的函数$f(x)$,是否也可用 Fourier 级数理论来研究它的性态? 结论是肯定的,其方法就是先将其延拓为一个周期函数. 即作一个新的函数 $f^*(x)$,它是周期函数,而在原(a,b)上,$f^*(x)=f(x)$. 因此,$f^*(x)$的 Fourier 级数的收敛情形在(a,b)上与$f(x)$完全相同.

其实,将许多自然界或工程技术中出现的运动规律认定为周期现象,是基于以下这样的认识:人们在相当长时间的观察或从实际所获得的经验中,以及对相同条件下应产生相同规律的法则中得知,这些现象是重复出现的,而且把它抽象至永久性,再在数学上用定义于$(-\infty,\infty)$上的周期函数来描述. 因此,人们在实践中并不真正需要,也不可能对某现象的周期性作无休止的考察. 从这一意义上讲,对给定在某个区间上的函数值,它是代表周期函数在一个周期段的变化规律呢? 还是将其视为周期延拓后一个周期段的变化规律? 其差异并不是不可逾越的鸿沟. 这也正是周期延拓方法所具有的实际意义.

1. 对于定义在$[-l,l]$上的可积函数$f(x)$,我们从$(-l,l]$或$[-l,l)$出发,将其延拓成以 $2l$ 为周期的周期函数. 例如作函数 $f^*(x)$如下:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x),x\in(-l,l],\\ f(x-2kl),(2k-1)l<x\leqslant(2k+1)l,\\ \quad(k=\pm1,\pm2,\cdots).\end{cases}$$

易知 $f^*(x)$是以 $2l$ 为周期的周期函数,且在$(-l,l]$上与$f(x)$之值相同. 又若在$(-l,l]$上$f(x)$满足收敛条件,$f^*(x)$也然. 因

此,$f^*(x)$的 Fourier 级数展式,当限定于$(-l,l]$上考察时,就成为$f(x)$的 Fourier 级数展式,这正是我们所需要的.

2. 对于定义在$[0,l]$上的可积函数,我们先将它扩充定义于$[-l,l]$,然后再作周期延拓,并根据(1)而得到它 Fourier 级数. 由于扩充方法的多样性,所得 Fourier 级数就有不同的形式.

(A) 用变量替换 $x=\frac{l+t}{2}$,并令

$$g(t)=f\left(\frac{l+t}{2}\right)=f(x),\quad -l\leqslant t\leqslant l,$$

易知 $\varphi(t)$是定义在$[-l,l]$上的可积函数. 于是可用(一)中所述方法得到$[-l,l]$上的 Fourier 级数. 把其中变量 t 以替换 $t=2x-l$ 换为 x,再限制 x 在原有区间$[0,l]$上即得$f(x)$的 Fourier 级数.

(B) 作函数

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x),x\in[0,l],\\ f(-x),x\in[-l,0],\end{cases}$$

易知$f^*(x)$是定义在$[-l,l]$上可积的偶函数. 于是,按(1)中方法将其作 $2l$ 为周期的周期延拓,可得出$f^*(x)$在$[-l,l]$上的 Fourier 级数,从而也就有了$f(x)$在$[0,l]$的 Fourier 级数. 注意到$f^*(x)$是偶函数,此时所得的是 Fourier 余弦级数,我们也称这种方法为用偶延拓法展成余弦级数.

(C) 作函数

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x),x\in(0,l),\\ -f(x),x\in(-l,0),\end{cases}$$

并令$f^*(0)=0,f^*(-l)=-f^*(l)$,易知$f^*(x)$是定义在$[-l,l]$上的可积奇函数. 于是,按 I 中方法将其作 $2l$ 为周期的周期延拓,可得出$f^*(x)$在$[-l,l]$上的 Fourier 级数,从而也就有了$f(x)$在$[0,l)$上的 Fourier 级数. 注意到$f^*(x)$是奇函数,此时所得到的是 Fourier 正弦级数,我们也称这种方法为用奇延拓

法展成正弦级数.

例1 求$[0,l]$上函数$f(x)=x^2$ 的 Fourier 级数展式.

解 (1) 按上面 A 中所述方法,并根据 4.1 节公式①及②,我们有

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^*(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}l^2;$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^*(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\mathrm{d}t=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi(2x-l)}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi(2x-l)}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^l -x\sin\frac{n\pi(2x-l)}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{l}{n^2\pi^2}\left[x\cos\frac{n\pi(2x-l)}{l}\right]_0^l=(-1)^n\frac{l^2}{n^2\pi^2};\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi(2x-l)}{l}\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{l^2}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因为$f(x)=x^2$ 在$[0,l]$上满足收敛条件,所以当 $x\in(0,l)$时有

$$x^2=\frac{l^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi(2x-l)}{l}+\frac{(-1)^{n-1}l^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi(2x-l)}{l}\right).$$

而对 $x=0,l$,上述 Fourier 级数收敛于$\frac{l^2}{2}$.

(2) 用偶延拓法作余弦级数展开,即作

$$f^*(x)=x^2,-l\leqslant x\leqslant l.$$

从而按 4.1 节公式①及②,可得

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots);\ a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\frac{2l^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}4l^2(n=1,2,\cdots).$$

根据收敛条件,并注意到$f^*(x)$的连续性可知,

$$x^2=\frac{l^2}{3}+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l},0\leqslant x\leqslant l.$$

特别,当 $x=0$ 时,有

$$0=\frac{l^2}{3}-\frac{4l^2}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots\right).$$

由此又得($l=1$)

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) 用奇延拓作正弦级数展开,即作

$$f^*(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,l],\\ -x^2, & x\in(-l,0].\end{cases}$$

从而按 4.1 节公式①以及②,可得

$$a_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots).$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\left\{\left[-x^2\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l+\int_0^l 2x\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right\}$$

$$=-\frac{2l^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{4l^2}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2l^2}{n\pi}, & n\text{ 是偶数},\\ \dfrac{2l^2}{n\pi}-\dfrac{8l^2}{n^3\pi^3}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

因为除 $x=\pm l$ 外,$f(x)$在$(-l,l)$上是连续的,根据收敛定理可知

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}2l^2}{n\pi}-\frac{4l^2[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x,\ 0\leqslant x<l.$$

在 $x=l$ 处,上述 Fourier 级数收敛到 0. 由此知上述公式在$[0,l]$上成立.

例 2* 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x-[x]-\dfrac{1}{2}, & x\text{ 非整数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$的 Fourier 级数展式.

解 (1) 我们有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]-\frac{1}{2}$$

$$=x+1-([x]+1)-\frac{1}{2}=x-[x]-\frac{1}{2}=f(x),$$

即$f(x)$是周期为 1 的周期函数. 又由

$$f(-x)=-x-[-x]-\frac{1}{2}=-\left\{x+[-x]+\frac{1}{2}+1-1\right\}$$

$$=-\left\{x+[1-x]-\frac{1}{2}\right\}=-\left\{x-[x]-\frac{1}{2}\right\}=-f(x),$$

可知$f(x)$是奇函数.

(2) $f(x)$是奇函数,我们有

$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$;

$$b_n=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\sin(2n\pi x)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\sin(2n\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin(2n\pi x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\ (n=1,2,\cdots).$$

从而得

$$x-[x]-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\pi}\sin(2n\pi x),\left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right).$$

3. 对于定义在$[a,b]$上的可积函数$f(x)$,其 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}+b_n\sin\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right\},$$

其 Fourier 系数为

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

实际上,用变量替换

$$t=\frac{\pi(2x-a-b)}{b-a},\quad -\pi\leqslant t\leqslant\pi,$$

且令

$$F(t)=f\left(\frac{t(b-a)+\pi(a+b)}{2\pi}\right)=f(x),$$

则 $F(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 的可积函数. 将 $F(t)$ 作周期为 2π 在 $(-\infty,\infty)$ 上的延拓,并求出其 Fourier 级数,然后再把 t 换为 x,即可得出上述公式.

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列函数的 Fourier 余弦级数展式

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 0, & a<x\leqslant \pi.\end{cases}$

2. 求下列函数的 Fourier 正弦级数展式.

(1) $f(x)=\cos 2x,[0\leqslant x\leqslant \pi]$. (2) $f(x)=x-\frac{x^2}{2},[0,1]$.

3. 设 $f\in R([0,\pi])$,且 $f(\pi-x)=f(x)$.

(1) 若将 $f(x)$ 展成余弦级数,试证明 $a_{2n-1}=0$.

(2) 若将 $f(x)$ 展成正弦级数,试证明 $b_{2n}=0$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ 且其 Fourier 级数的和函数为 $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n x,\ a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$,试证明 $S\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

§5 Fourier 级数的其他收敛意义

从前面的讨论已暗示出,若对函数不附加其他条件,则其 Fourier 级数是有可能发散的. 如果我们改变(点)收敛的方式,那么情况就不同了. 这是课题的数学性质更深层次的挖掘和研究的体现,有着重要的应用. 下面我们总假定函数以 2π 为周期,

且在$[-\pi,\pi]$上可积(在反常积分意义下还要求绝对可积).

5.1 算术平均求和

设有数组$a_1,a_2,\cdots,a_n$,我们称数

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

为该数组的**算术平均(值)**.

对于一个数值级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$,作其部分和数列

$$S_0=a_0,S_1=a_0+a_1,\cdots,S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\cdots,$$

则称

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1},(n=0,1,2,\cdots)$$

为部分和数列作出的算术平均数列. 若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma,$$

则称级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$可算术平均求和,称σ为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$的**算术平均和**(亦称**$(C,1)$求和**).

易知,若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛且其和为S,则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$可算术平均求和,其和也为S.

对于函数$f(x)$的 Fourier 级数的部分和$S_n(x)\underline{\underline{\mathrm{def}}}S_n(f,x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$,作其算术平均

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

由公式

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

可知

$$\sigma_n(x)=\frac{\pi^{-1}}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt.$$

注意到

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$=\frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}[\cos kt-\cos(k+1)t]$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)t}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

可得

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt,\Phi_n(t)=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

$\Phi_n(t)$称为 **Fejér**[①] **核**,$\sigma_n(x)$称为$f(x)$的 **Fejér 积分**(Fourier 级数部分和的算术平均).

引理 12.4(Fejér 核的性质)

(1) $\Phi_n(t)$ 是在$(-\infty,\infty)$上的非负偶函数;

(2) $\Phi_n(0)=\frac{n+1}{2}$;

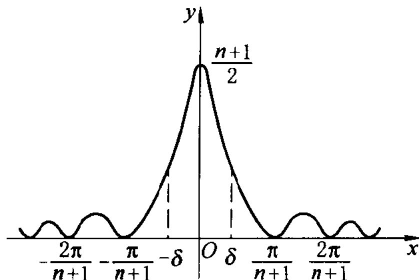


图 12-6

① 费耶(1880～1959),匈牙利数学家.

(3) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi_n(t)=1.$

(图 12-6)

证明 (1) 显然. (2) 我们有

$$\Phi_n(0)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(0)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right]=\frac{n+1}{2}.$$

(3) 注意到$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)\mathrm{d}t=1$,我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}1=1.$$

推论 12.5 对任意的 δ:$0<\delta\leqslant\pi$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\Phi_n(t)=0$.

证明 因为我们有

$$0\leqslant\Phi_n(t)\leqslant\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

所以在$[-\pi,\delta]\cup[\delta,\pi]$上有 $\Phi_n(t)\leqslant\frac{M}{2(n+1)}$,即得所证.

对于$[-\pi,\pi]$上的连续函数$f(x)$,若有$f(-\pi)=f(\pi)$,我们总可以将$f(x)$以 2π 为周期延拓到全直线$(-\infty,\infty)$上. 下面,为方便起见,延拓后的函数仍记为$f(x)$,它当然是一致连续的.

定理 12.10 (Fejér) 设 $f\in C([-\pi,\pi])$,且$f(-\pi)=f(\pi)$,则在$[-\pi,\pi])$上其 Fourier 级数可算术平均求和于$f(x)$.

证明 任取 $x\in[-\pi,\pi]$,对任给 $\varepsilon>0$,我们有

$$|f(x)-\sigma_n(x)|=\left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x)-f(x+t)|\mathrm{d}t$$

$$=\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\right\}\Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,\mathrm{d}t=I_1+I_2+$$
I_3.

这里 $\delta>0$ 取法如下:使得

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |x'-x''|<\delta.$$

由此知

$$I_2\leqslant\frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{3}.$$

为估计 I_1,I_3,不妨假定 $|f(x)|\leqslant M,\ x\in[-\pi,\pi]$,从而对任意的 $x\in[-\pi,\pi]$有

$$\begin{aligned}I_3&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)[\,|f(x)|+|f(x+t)|\,]\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\leqslant\frac{2M}{\pi}\max_{t\in[\delta,\pi]}\Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi}\mathrm{d}t\\&=\frac{2M(\pi-\delta)}{\pi}\max_{t\in[\delta,\pi]}\Phi_n(t)<2M\max_{t\in[\delta,\pi]}\Phi_n(t).\end{aligned}$$

由此可知(见推论 12.4),存在 n_0,当 $n>n_0$ 时有 $I_3<\frac{\varepsilon}{3}$. 类似地可推得 $I_1<\frac{\varepsilon}{3}$.

综上所述,存在 n_0,当 $n>n_0$ 时,对一切 $x\in[-\pi,\pi]$得到

$$|f(x)-\sigma_n(x)|<\varepsilon.$$

推论 12.6 设 $f\in C([-\pi,\pi])$,且 $f(-\pi)=f(\pi)$. 若$f(x)$的 Fourier 级数在点 $x_0\in[-\pi,\pi]$上收敛,则必收敛于 $f(x_0)$.

证明 由题设知,存在 l,使得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f,x_0)=l$.

由此自然有$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=l$. 而根据 Fejér 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=f(x_0),\quad l=f(x_0).$$

定理 12.11(Weierstrass) 若 $f\in C([-\pi,\pi])$,且 $f(-\pi)=f(\pi)$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在三角多项式 $T(x)$,使得

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

证明 因为$f(x)$的 Fourier 级数的部分和 $S_n(f,x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$是三角多项式,所以 Fejér 和 $\sigma_n(x)$也是三角多项式. 从而取 $T(x)$为 Fejér 和(阶不超过 n)即可.

5.2 封闭系,均方收敛

对于一个函数类$\mathscr{F}$(由满足某种条件的所有函数的全体形成的集合),如果能从$\mathscr{F}$中找出较简明而有规则的一列函数$\{\varphi_n(x)\}$,使得对于$\mathscr{F}$中的任意一个$f(x)$,均可用$\{\varphi_n(x)\}$中的有限个线性组合在某种意义下逼近$f(x)$,那么对于研究$\mathscr{F}$自然是十分有利的.

定义 12.2 设$\mathscr{F}$是所有定义在$[a,b]$上的某个函数类,且在$\mathscr{F}$中有一列函数

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$$

若 $f\in\mathscr{F}$,对于任给 $\varepsilon>0$,存在有限个函数 $\varphi_{n_1}(x),\varphi_{n_2}(x),\cdots,\varphi_{n_m}(x)$,以及实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$|f(x)-[\lambda_1\varphi_{n_1}(x)+\lambda_2\varphi_{n_2}(x)+\cdots+\lambda_m\varphi_{n_m}(x)]<\varepsilon,\quad x\in[a,b],$$

则称$\{\varphi_n(x)\}$在$\mathscr{F}$中**在一致逼近的意义下是封闭的**,称$\{\varphi_n(x)\}$在**一致逼近意义下**是$\mathscr{F}$中的**封闭系**.

从这一术语来讲,那么 Weierstrass 的两种逼近定理可以重述如下:

(1) x 的非负整数幂函数列

$$1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$$

在一致逼近意义下是$[a,b]$上连续函数类 $C([a,b])$中的封闭系.

(2) 三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在一致逼近意义下是函数类 $\mathscr{F}=\{f\in C([a,b]):f(-\pi)=f(\pi)\}$中的封闭系.

现在,让我们来考察另一种逼近的意义,即所谓均方逼近. 它不是从逐点函数值的误差来表示逼近的程度,而是用积分平

均的意义审查它们之间误差的.此外,考虑到数学结构上的优越性,先取其平方,即$g(x)$逼近$f(x)$的程度以

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx$$

来度量.

为此,自然认为其背景(函数类)应是在$[a,b]$上平方可积的函数类,记为$\mathscr{F}^2([a,b])$,或$f\in R([a,b]$(此时有$f^2\in R([a,b]))$;或在$f(x)$反常可积时,还要求$f^2(x)$在$[a,b]$上反常可积.

若$f\in \mathscr{F}^2([a,b])$,$g\in \mathscr{F}^2([a,b])$,则由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

可知$f(x)\cdot g(x)$是绝对可积的.

若取$g(x)\equiv 1$,$x\in[a,b]$,则说明当$f\in\mathscr{F}^2([a,b])$时,$f(x)$在$[a,b]$上是绝对可积的.

定理 12.12 设$f\in\mathscr{F}^2([-\pi,\pi])$,且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2dx=\min_{T_n(x)}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx, \quad ①$$

其中最小值是对不超过n阶的一切三角多项式$T_n(x)$而取的.此外,还有 Bessel① 不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \quad ②$$

成立.

证明 不妨设三角多项式为

① 贝塞尔(1784~1846),德国数学家.此不等式是在 1829 年证明的.

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

那么根据三角函数系的正交性,可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$+\pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\right]$$

$$-2\left\{\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}A_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+B_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\right]$$

$$-2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_kA_k+b_kB_k)\right]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right]$$

$$-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

由此可知,当 $A_0=a_0$,且

$$A_n=a_n,\quad B_n=b_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

时,即 $T_n(x)$是 $S_n(f,x)$时,上式左端取到最小值,式①成立.

当 $T_n(x)=S_n(f,x)$时,由上知

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

令 $n\to\infty$,即得式②.

注 由 Bessel 不等式可知,不论$f(x)$的 Fourier 级数是否收敛,其 Fourier 系数平方和之级数一定收敛.

定义 12.3 设 $\mathscr{F}^2([a,b])$中有一函数系$\{\varphi_n(x)\}$. 若 $f\in\mathscr{F}^2([a,b])$,对任给 $\varepsilon>0$,存在有限个函数 $\varphi_{n_1}(x),\varphi_{n_2}(x),\cdots,\varphi_{n_m}(x)$,以及实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x)\right]^2\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

则称$\{\varphi_n(x)\}$是 $\mathscr{F}^2([a,b])$中在**均方(平方平均)逼近的意义下的封闭系**,或说$\{\varphi_n(x)\}$在 $\mathscr{F}^2([a,b])$中**以均方逼近的意义是封闭的**.

定理 12.13 在满足条件 $f(-\pi)=f(\pi)$且在$[-\pi,\pi]$上连续的$f(x)$全体形成的函数类中,三角函数系在均方逼近的意义下是封闭的.

证明 设 $f\in C([-\pi,\pi])$,且 $f(-\pi)=f(\pi)$,根据三角函数系在一致逼近的意义下的封闭性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在三角多项式 $T(x)$,使得

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}},\ x\in[-\pi,\pi].$$

由此立即得出

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}x=\varepsilon.$$

定理 12.14 三角函数系以均方逼近的意义在 $\mathscr{F}^2([-\pi,\pi])$中封闭.

证明 (1) 设 $f\in R([-\pi,\pi])$,不妨假定 $f(-\pi)=f(\pi)$.(修改一个点上的函数值,不影响可积性及积分值)易知此时对任给 $\varepsilon>0$,存在 $g\in C([-\pi,\pi])$,且 $g(-\pi)=g(\pi)$,使得(见第七章注记(二)命题 7.3)

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}.$$

应用定理12.13于$g(x)$，可知存在三角多项式$T(x)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-T(x)|^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}$$

综上所述，我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\{[f(x)-g(x)]+[g(x)-T(x)]\}^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 4\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[g(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x\right\}<\varepsilon.$$

(2) 设$f\in\mathscr{F}^2([-\pi,\pi])$，不妨假定$x=\pi$是$f(x)$的唯一瑕点. 此时，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$\int_{\pi-\delta}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}$. 作函数:

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[-\pi,\pi-\delta),\\ 0, & x\in[\pi-\delta,\pi],\end{cases}$$

且令$f_2(x)=f(x)-f_1(x)$，$x\in[-\pi,\pi]$，则因在$[\pi-\delta,\pi]$上，$f_2(x)=f(x)$，所以有

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi}f_2^2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}.$$

又因$f_1\in R([-\pi,\pi])$，所以由(1)知，存在三角多项式$T(x)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8}.$$

这样，注意到$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-T(x)+f_2(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 4\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x+4\int_{-\pi}^{\pi}f_2^2(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

定理12.15(Parseval① 等式) 设$f\in\mathscr{F}^2([-\pi,\pi])$，且

① 帕斯瓦尔(1755～1836)，法国数学家. 此等式是在1779年证明的.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\text{则}$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x. \qquad ③$$

式③也称为 **Parseval(封闭)关系.**

证明 对任给 $\varepsilon>0$,由三角函数系的封闭性可知,存在某个不超过 n 阶的三角多项式 $T(x)$,使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

又根据 $S_n(f,x)$ 的均方逼近的极小性:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_n^2+b_n^2)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.\end{aligned}$$

再由 ε 的任意性即得所证.

推论 12.7 设 $f\in\mathscr{F}^2([-\pi,\pi])$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x=0.$$

证明 结论可在等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$$

中令 $n\to\infty$ 直接得出.

定理 12.16(广义 Parseval 等式) 设$f(x),g(x)$是$[-\pi,\pi]$上的平方可积函数,则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n). \qquad ④$$

其中 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$是$f(x)$的 Fourier 系数;$\alpha_0,\alpha_n,\beta_n(n=1,2,\cdots)$是$g(x)$的 Fourier 系数.

证明 对$f(x)+g(x),f(x)-g(x)$的 Parseval 关系,我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2],$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2].$$

将上两式相减,可知

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x=2a_0\alpha_0+4\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).$$

即得所证.

注 在式④中取$g(x)=f(x)$,则化为 Parseval 等式.

定理 12.17(唯一性) 设 $f\in C([-\pi,\pi]),g\in C([-\pi,\pi])$.

(1) 若$f(x)$的 Fourier 系数全为 0:$a_0=0,a_n=b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$,则$f(x)\equiv 0$.

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的 Fourier 系数全相等,则 $f(x)=g(x),x\in[-\pi,\pi]$.

证明 (1) 由题设知

$$a_0^2=0,a_n^2=b_n^2=0\ (n=1,2,\cdots).$$

 从而由 Parseval 等式得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f\in C([-\pi,\pi])$,所以$f(x)\equiv 0$.

(2) 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$,则由题设知 $\varphi(x)$的 Fourier 系数全为 0. 从而得到

$$\varphi(x)=0,\ \ x\in[-\pi,\pi].$$

这就是说$f(x)-g(x)=0,x\in[-\pi,\pi]$. 即得所证.

定理 12.18 设 $f\in C([-\pi,\pi])$,且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

若上式右端级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛,则该级数一致收敛于$f(x)$.

证明 记该级数的和函数为 $S(x)$,易知 $S(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续,且 $S(x)$的 Fourier 系数为 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$. 这就是说,$f(x)$与$S(x)$有相同的 Fourier 系数,从而有

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

思考练习 解答下列问题:

1. 试举出在$[0,1]$上 Riemann 可积函数列$\{f_n(x)\}$以及 $f\in R([0,1])$,使得 $f_n(x)$在$[0,1]$中的任一点 x 上均不收敛于$f(x)$,但有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x=0.$$

(提示:不妨取$f(x)\equiv 0$,转而考察面积趋于 0 的 $f_n(x)$.)

2. 设 $0\leqslant a<b<+\infty$,试证明函数系 $1,x^2,x^4,\cdots,x^{2n},\cdots$在$R([a,b])$中以均方收敛意义是封闭的.

3. 试证明三角函数系 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$ 在$R([0,\pi])$中以均方逼近意义下是封闭的.

4. 试问三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{\sqrt{n}}$$

是$\mathscr{F}^2([-\pi,\pi])$中某个函数的 Fourier 级数吗?

5. 若 $f\in R([-\pi,\pi])$,试证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_{n+1}(f,x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(f,x)]^2\mathrm{d}x.$$

6. 设 $f,g\in R([-\pi,\pi])$,若$f(x)$与$g(x)$的 Fourier 系数全相等,试证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

7. 若三角级数

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

在$[-\pi,\pi]$上一致收敛,试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n^2+B_n^2)$是否收敛?

5.3 一致收敛,Fourier 级数的微分和积分

我们知道,一个局部可积的周期(2π)函数,其 Fourier 级数是可以不收敛的,不过其 Fourier 系数的平方和级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

是收敛的.从而可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$$

也是收敛的.这些特性为获得 Fourier 级数的微分和积分公式奠定了基础.

定理 12.19 设 $f\in C([-\pi,\pi])$,且是以 2π 为周期的函数.若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上逐段可微,且 $f'\in R([-\pi,\pi])$,则$f(x)$的 Fourier 级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in[-\pi,\pi] \qquad ①$$

证明 为证式①右端级数的一致收敛性,我们来考察

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|).$$

根据$f(x)$与$f'(x)$的 Fourier 系数的关系,我们有

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k(f')|+|b_k(f')|}{k}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}[|a_k(f')|+|b_k(f')|]^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(4\sum_{k=1}^{n}[a_k^2(f')+b_k^2(f')|]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而可知级数①(绝对)一致收敛.又因为$f(x)$连续,所以式①成立.

推论 12.8 在上述定理的条件下,还可得出级数①的部分和收敛速率的估计:

$$\max_{[-\pi,\pi]}|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\quad(n=1,2,\cdots),\qquad ②$$

其中 $\varepsilon_n\to0\ (n\to\infty)$.

证明 式②可从不等式

$$\max_{[-\pi,\pi]}|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}[|a_k(f)|+|b_k(f)|]$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k(f')|+|b_k(f')|}{k}\leqslant\varepsilon_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\varepsilon_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon_n\left(\int_{n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}$$

得到,其中

$$\varepsilon_n=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[|a_k(f')|+|b_k(f')|\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty).$$

推论 12.9 设 $f\in C^{(k-1)}([-\pi,\pi])(k\geqslant 1)$，且是以 2π 为周期的函数. 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 k 次逐段可微，且 $f^{(k)}\in R([-\pi,\pi])$，则

$$\max_{[-\pi,\pi]}|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

其中 $\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$.

证明 略.

定理 12.20(逐项微分) 设 $f\in C^{(1)}([-\pi,\pi])$，且是以 2π 为周期的函数. 若在 $[-\pi,\pi]$ 上除有限个点外 $f''(x)$ 存在，且 $f''\in R([-\pi,\pi])$，则对 $f(x)$ 的 Fourier 展式：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可在 $[-\pi,\pi]$ 上进行逐项微分：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),\tag{③}$$

且式③中的级数是一致收敛的.

证明 结论可从函数项级数逐项微分定理以及定理 12.19 导出.

定理 12.21(Du Bois Reymond) 设 $f\in R([-\pi,\pi])$，且是以 2π 为周期的函数，则对 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可进行逐项积分：

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx+b_n\frac{1-\cos nx}{n}\right),\tag{④}$$

且右端级数是一致收敛的.

证明 对任意给定的 $x\in[0,2\pi]$，考察以 2π 为周期的函数：

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & t=0,t=x,\\ \pi, & t\in(0,x),\\ 0, & t\in(x,2\pi).\end{cases}$$

易知 $a_0(g)=x$,且有

$$a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^x \pi\cos nt\mathrm{d}t=\frac{\sin nx}{n}\ (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^x \pi\sin nt\mathrm{d}t=\frac{1-\cos nx}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

根据 f 与 g 的广义 Parseval 等式,可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \pi f(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx}{n}+b_n\frac{1-\cos nx}{n}\right),x\in[0,2\pi],$$

即得式④. 又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n}<+\infty,$$

所以式④中级数在$[0,2\pi]$上是一致收敛的.

推论 12.10 设$f(x)$满足定理 12.21 中的条件,并令 $F(x)=\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t$,则

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right), \qquad ⑤$$

且右端级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛.

证明 式⑤可从式④立即得出,而级数的一致收敛性也可应用 Weierstrass *M*-判别法来证明. 因此,式⑤中级数也是$F(x)$的 Fourier 级数.

注 若$f(x)$是连续的周期(2π)函数,且$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,则$a_0=0$. 此时式⑤成为

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right).$$

注意到上式右端是$f(x)$的一个原函数,它与$f(x)$的任一原

函数 $\Phi(x)$只差一常数. 从而在 $\Phi(-\pi)=\Phi(\pi)$时,我们有

$$\Phi(x)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right).$$

其中 C 是常数,可由具体情况下的特殊点值定出. 这就是暗示我们,如果我们求得 $f'(x)$的 Fourier 级数,那末$f(x)$可由上述公式得到.

例 1 $\dfrac{x^2}{2}-\pi x+\dfrac{\pi^2}{3}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$

证明 已知$\dfrac{\pi-t}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nt}{n}\quad(0<x<2\pi)$. 从而有

$$\int_0^x\frac{\pi-t}{2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t,$$

或写成

$$\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

由此即得所证.

例 2 考察以 2π 为周期的函数$f(x)=\ln(1+2r\cos x+r^2)$, $|r|<1$ 的 Fourier 展式.

易知$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续,还有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+2r\cos x+r^2)=-\frac{2r\sin x}{1+2r\cos x+r^2},$$

此导函数也在$(-\infty,\infty)$上连续,且已知有 Fourier 展式

$$-\frac{2r\sin x}{1+2r\cos x+r^2}=-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}r^n\sin nx,$$

从而根据逐项积分定理可得

$$\ln(1+2r\cos x+r^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\cos nx+C.$$

令 $x=0$,从等式

$$\ln(1+r)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}+C$$

可知 $C=0$.

最后,我们获得展式

$$\ln(1+2r\cos x+r^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\cos nx,|r|<1.$$

注意到在 $x\neq\frac{(2m+1)\pi}{2}$ $(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,$r=1$ 时,上述公式成立,故又有

$$\ln2(1+\cos x)=2\ln2\left|\cos\frac{x}{2}\right|=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos nx.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上可微,且 $f'\in R([0,\pi])$. 若$f(0)=f(\pi)=0$. 试证明

$$\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant A\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

2. 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可微,且 $f'\in R([-\pi,\pi])$. 若$f(-\pi)=f(\pi)$,且$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,试证明$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

3. 设$f(x)$是$[-\pi,\pi]$上连续可微的周期(2π)函数,试证明

$$f(x+\pi)-f(x)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_x^{x+\pi}f(t)\cos[(2n+1)(t-x)]\mathrm{d}t.$$

4. 设 $f\in R([-\pi,\pi])$是以 2π 为周期的函数,且 a_0,a_n,b_n $(n=1,2,\cdots)$是其 Fourier 系数,试求函数 $F_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$ $(h>0)$的 Fourier 系数.

$\left(\text{提示}:F_h(x)=\frac{1}{2h}\left[\int_0^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-h}f(t)\mathrm{d}t\right]\right.$,先求 $F_0(x)$ 的 Fourier 级数$\Big)$

注　　记

(一) 三角级数发展史简介

在数学发展史上,有关三角级数的论述,虽然在 18 世纪初期,早已在 D. Bernoulli 以及 D. Alember 等人关于弦振动的研究工作中出现,但只是在 1822 年法国数学家和物理学家 Fourier 发表了名著《热的解析理论》之后,人们才看到了三角级数的系统应用,明白了三角级数的效力和重要性,从而引起了众多数学家的关注,并对以$f(x)$生成的三角级数赋于 Fourier 级数的名称.

Fourier 关于热传导理论的研究,可以说在 19 世纪数学物理领域中是最具大胆创新和有影响的工作,是探讨热传导方法的先驱. 其中,在关于可将一个函数展成三角级数的论述中,蕴含着许多当时数学界还未曾真正建立起来的重要概念. 如随意使用不连续函数;把积分当作面积来认识,而不是传统的反导数;涉及尚未明确定义的级数收敛性等等. 因此,从数学上看,他的论证是不严谨的. 但由于这一工作在应用上的成功,致使许多数学家感到解决有关课题的迫切性. 从而在随后的几十年间,相继地建立起函数的定义(Dirichlet),级数收敛的定义(Cauchy),积分的定义(Riemann),甚至导出一致连续以及一致收敛的概念(Weierstrass),为今日之数学分析内容体系奠定了基础,也使 Fourier 级数的理论走上了正规的发展道路.

此外,Fourier 分析至今仍是经典分析和现代分析最有生命力的部分,且有着重要的具体应用. 它给予其他数学分支的发展以深刻影响,如测度论,算子论以及拓扑群等,并导致代数方法进入分析领域,推动了抽象空间理论的进步.

顺便指出,Fourier 还发明了现称之为 Fourier 积分的卓越的理论,从而为定义在$(-\infty,\infty)$上的(非周期)函数的研究提供了强有力的工具.

(二) 应用复变方法求三角级数的和

所谓应用复变方法求三角级数之和,是指利用 Euler 公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

以及认为对复数 $z=e^{ix}$ 的函数$f(z)$也与实变量函数有相同的 Taylor 展式. 例如

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},|z|\leqslant 1,z\neq -1.$$

下面作一简单说明:当$|z|\leqslant 1$且$z\neq 1$时,有

$$\ln(1+z)=\ln|1+z|-\mathrm{i}\arg(1+z),\quad -\pi<\arg(1+z)<\pi.$$

设$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则由$|z|\leqslant 1$且$z\neq -1$可知$0\leqslant r\leqslant 1$;且若$r=1$,则

$$\theta\neq(2m+1)\pi\quad(m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

显然,我们有

$$|1+r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)|=\sqrt{1+2r\cos\theta+r^2},$$

$$\arg[1+r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]=\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right).$$

从而可得(见3.2节中之例4、例5)

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\frac{1}{2}\ln(1+2r\cos\theta+r^2)+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\cos n\theta+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\sin n\theta\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(re^{i\theta})^n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.\end{aligned}$$

例1 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

之和.

为此,注意到$e^{inx}=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=z^n\ (z=e^{ix})$,转而考察

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)=\ln\frac{1}{1-z},|z|\leqslant 1,z\neq 1.$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z}&=\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{1}{(1-\cos x)-\mathrm{i}\sin x}\\&=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{x}{2}}\\&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

所以$\frac{1}{1-z}$的模是$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$,幅角为$\frac{\pi-x}{2}$. 因此我们有

$$\ln\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+\mathrm{i}\,\frac{\pi-x}{2}.$$

由此可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<2\pi.$$

从上述演算又可得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$$

(三) 关于 Fourier 级数的敛散性

存在以 2π 为周期的连续函数,其 Fourier 级数在一个稠密集上发散(Du Bois Reymond);也存在以 2π 为周期的连续函数,其 Fourier 级数处处收敛,但不一致收敛(Lebesgue,1906 年),但是否存在以 2π 为周期的连续函数,其 Fourier 级数处处发散,这是一个未解决的问题.

(四) Fourier 级数的复数形式

在前面所讲的 Fourier 级数的形式中,同一频率的简谐分量是分成两项来写的. 例如周期为 T 的函数$f(t)$,我们有

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t).$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,称为基频,且有

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t;\quad \left.\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\\ b_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\end{aligned}\right\}(n=1,2,\cdots).$$

这种记法在运算和应用中并不总是方便的. 现在,我们设法把反映同一振动频率的分量写成一项,自然想到复数法. 记

$$\cos nx=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2},\quad \sin nx=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}},$$

则其 Fourier 级数可写成

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}.$$

令 $C_0=\frac{a_0}{2}$,以及

$$C_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2};\ C_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2},\ (n=1,2,\cdots)$$

可得

$$f(x)\sim C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

其中,$C_{-n}=\overline{C}_n$(C_n 的共轭数),而且

$$C_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-\mathrm{i}\sin nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$C_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

或统一写为

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

此外,C_n 与原来的 a_n,b_n 的关系还有

$$2|C_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

它反映出同频率分量振幅的大小.

在这里,只要我们认定虚数单位"i"是当作常数来处理的,那么指数函数在微分、积分运算中也是很顺利的.

(五) Fourier 积分、Fourier 变换

为了后继课程的需要,我们对 Fourier 积分公式以及 Fourier 变换作一简要介绍.其中有若干结果的证明略去,读者在学习本书第三册关于含参变量的无穷区间的积分的内容以后就不难理解了.

1. Fourier 积分公式的导入.

设以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 展成为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),x\in[-l,l]$$

以系数公式代入又得

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{l}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}F_l\left(\frac{n\pi}{l}\right)\frac{\pi}{l},$$

$$F_l(y)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t. \qquad ①$$

现在,我们要让 $l\to+\infty$,也就是周期无限制地增大. 这在实践中,相当于在很长的时间内,所观测到的运动态势或信号波形一直没有出现重复的周期现象. 这就促使人们认为那是一种非周期现象. 反映在数学上,它表示为定义在$(-\infty,\infty)$上非周期函数. 此时,如果还假定

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

那么对任意的 $y\in(-\infty,\infty)$,令 $l\to+\infty$,我们有

$$F_l(y)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t\to\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t;$$

$$\frac{l}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

因为式①中右端的和式类似于“$F_{+\infty}$”在$[0,\infty)$上的积分和,其分划点列为

$$\left\{0,\frac{\pi}{l},\frac{2\pi}{l},\cdots\right\},$$

所以不难想像,式①之右端在 $l\to+\infty$时趋于积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y.$$

以上分析将导致公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y,x\in(-\infty,\infty). \qquad ②$$

同样可写为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[a(y)\cos yx+b(y)\sin yx]\mathrm{d}y,x\in(-\infty,\infty). \qquad ③$$

其中

$$a(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos yt\mathrm{d}t,b(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin yt\mathrm{d}t,y\in(-\infty,\infty).$$

公式②与③称为$f(x)$的 **Fourier 积分公式**,其右端称为$f(x)$的 **Fourier 积**

分.

2. Fourier 积分的(点)收敛.

设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积且绝对可积：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty.$$

此时,显然 $a(y)$与 $b(y)$是 $y\in(-\infty,\infty)$的连续函数.此外,还有

$$a(y)\to 0,b(y)\to 0,(|y|\to+\infty).$$

由此立即可知,积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t=a(y)\cos yx+b(y)\sin yx$$

作为 y 的函数在$[0,+\infty)$上连续.

现在,取 $A>0$,考察

$$F(A)\underline{\underline{\mathrm{def}}}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y,$$

我们有(在第三册中将证明)

$$F(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left\{\int_{0}^{A}\cos y(x-t)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}t,$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin A(x-t)}{x-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t.$$

注意到$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}(A>0)$,可得

$$F(A)-C=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\varphi_c(t)\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t,$$

其中

$$\varphi_c(t)=\varphi_c(x,t)\underline{\underline{\mathrm{def}}}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-C.$$

命题 1(Dini 判别法) 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty.$$

对 $x\in(-\infty,\infty)$,$C\in(-\infty,\infty)$,若存在 $\delta>0$,使得

$$\int_{0}^{\delta}\frac{|\varphi_C(t)|}{t}\mathrm{d}t<+\infty.$$

则 $F(A)\to C(A\to+\infty)$,即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y=C.$$

证明 因为我们有

$$F(A)-C=\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varphi_C(t)}{t}\sin At\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2t}\sin At\,\mathrm{d}t+\frac{2C}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t,$$

由题设知,上述第一和第二个积分在 $A\to+\infty$时趋于 0 (Riemann-Lebesgue 引理). 此外,

$$\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t=\int_{A\delta}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\to 0,A\to+\infty.$$

即得所证.

注 在满足定理条件且点 x 是$f(x)$的第一类间断点,那么

$$C=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

命题 2(Lipshitz 判别法) 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

若$f(x)$在点 x 处满足Lipα($0<\alpha\leqslant 1$)条件:存在 $M>0$ 以及 $\delta>0$,对$\in(-\delta,\delta)$,有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha},$$

则 $F(A)\to f(x),A\to+\infty$,即

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[a(y)\cos yx+b(y)\sin yx]\mathrm{d}y.$$

证明 直接验证 Dini 条件.

命题 3(可微点的情形) 设

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

若$f(x)$在点 x 处可微,则 $F(A)\to f(x)\quad(A\to+\infty)$.

3. Fourier 积分的复数型,Fourier 变换.

与 Fourier 级数类似,诱导 Fourier 积分为复数型表示式,对我们是十分便利的.

首先,按前述定理,在$f(x)$连续且逐段可微的情形下,我们有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y.$$

注意到被积函数是 y 的偶函数,故又有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y. \tag{④}$$

现在来引入虚部. 因为

$$|f(t)\sin y(t-x)|\leqslant|f(t)|,$$

所以由 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的绝对可积性可知,存在积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(t-x)\mathrm{d}t.$$

考虑到此积分是关于 $y\in(-\infty,\infty)$ 的奇函数,从而对任意 $A>0$,有

$$\int_{-A}^{A}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y=0.$$

因此,至少在主值意义下,可定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y=0.$$

这启示我们以

$$\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(t-x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y$$

与式④相加,可得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}y(t-x)}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y \tag{⑤}$$

于是,导入下述定义.

定义 1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可积且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

则称

$$F(f)(y)=\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\mathrm{d}t$$

为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**.

非周期函数的 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(y)$,相当于周期函数情况下的 Fourier 系数 C_n. 求 Fourier 系数的目的,是组成 Fourier 级数来表达 $f(x)$,同样,作 Fourier 变换的目的,是要把 $f(x)$ 表达成 Fourier 积分形式. 即期

望通过$\hat{f}(x)$的积分在一定意义下返回(收敛)到$f(x)$,即

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

式⑥称为$f(x)$的反演公式,我们有下述结果:

命题 4 设 $f\in C((-\infty,\infty))$且绝对可积. 若$f(x)$在点 x 处满足 Dini 条件,则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

证明 注意到等式

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\,\mathrm{d}t=a(y)+\mathrm{i}b(y),$$

我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}&=(a(y)+\mathrm{i}b(y))(\cos xy-\mathrm{i}\sin xy)\\&=a(y)\cos xy+b(y)\sin xy-\mathrm{i}a(y)\sin xy+\mathrm{i}b(y)\cos xy.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_{-A}^{A}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y\\=&\int_{-A}^{A}[a(y)\cos xy+b(y)\sin xy]\,\mathrm{d}y=2\pi F(A).\end{aligned}$$

这样,Fourier 积分(反演公式)的收敛性回归到命题 1(Dini 判别法). 注意到$f(x)$在点 x 的连续性即得所证.

注 关于 Fourier 变换及反演(积分公式),许多书刊中也写成如下形式:

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}\,\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y,$$

至于还有其他形式的写法,不再一一表出.

此外,若积分$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y$ 存在,则称为 Fourier 反变换,并记为 $F^{-1}(f)(x)$.

4. Fourier 变换的性质.

下文中,凡谈到函数的 Fourier 变换或逆变换时,总假定这些函数在$(-\infty,\infty)$上可积且绝对可积.

命题 5(线性性质) 设 α,β 为任意实数,由

$$F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g);$$
$$F^{-1}(\alpha f+\beta g)=\alpha F^{-1}(f)+\beta F^{-1}(g).$$

证明 略.

命题6 $f(x)$的 Fourier 变换在$(-\infty,\infty)$上有界:

$$|\hat{f}(y)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

且有

$$\lim_{y\to\infty}\hat{f}(y)=0.$$

证明 注意到$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}|=1$,我们有

$$|\hat{f}(y)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\,\mathrm{d}t\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\right|\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

此外,因为有

$$\begin{aligned}\hat{f}(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\cos yt+\mathrm{i}f(t)\sin yt]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos yt\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin yt\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

并注意到$f(t)$在$(-\infty,\infty)$绝对可积性,所以引用 Riemann-Lebesgue 引理可知,上式右端两个积分在 $y\to\infty$时趋于 0,即得所证.

命题7 设$\{f_n(x)\}$是$(-\infty,\infty)$上可积且绝对可积函数列,$f(x)$也在$(-\infty,\infty)$上可积且绝对可积. 又有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0,$$

则在$(-\infty,\infty)$上 Fourier 变换序列$\{\hat{f}_n(y)\}$一致收敛于$f(x)$的 Fourier 变换$\hat{f}(y)$.

证明 只需注意到不等式

$$|F(f_n)(y)-F(f)(y)|=|F(f_n-f)(y)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t$$

即可.

命题8 $f(x)$的 Fourier 变换$\hat{f}(y)$在$(-\infty,\infty)$上连续.

证明 只需注意 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}$一致连续性以及$f(x)$在$(-\infty,\infty)$的绝对可积性即可.

命题9(导函数的 Fourier 变换) 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可微,且在$(-\infty,\infty)$上可积. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

则对 $y\in(-\infty,\infty)$有

$$F(f')(y)=(-\mathrm{i}y)F(f)(y).$$

证明 由 $f'(x)$在$(-\infty,\infty)$上的可积性知道

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0.$$

从而有

$$F(f')(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\mathrm{i}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\mathrm{d}t=-\mathrm{i}yF(f)(y).$$

命题 10 若$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上 m 次可微,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f^{(k)}(x)|\mathrm{d}x<+\infty\quad(k=1,2,\cdots,m),$$

则

$$F(f^{(m)})(y)=(-\mathrm{i}y)^mF(f)(y).$$

特别地,我们有

$$\lim_{|y|\to+\infty}y^m\hat{f}(y)=0.$$

命题 11(Fourier 变换的导数) 设

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^n)|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

则$f(x)$的 Fourier 变换$\hat{f}(y)$直到 n 次可微,且有

$$\frac{\mathrm{d}^{(k)}}{\mathrm{d}y}\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}t)^kf(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\mathrm{d}t\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

特别地,我们有

$$\hat{f}^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k\int_{-\infty}^{+\infty}t^kf(t)\mathrm{d}t\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

证明 略.(参阅本书第三册含参数的反常积分理论)

(六)关于三角级数展式的唯一性问题

大家知道,在上一章中,曾论述过幂级数展式的唯一性定理,现在简要介绍有关三角级数展式的唯一性结果:

引理 1(Cantor) 若三角级数

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

在区间$[a,b]$上收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$;$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.

命题 12(Cantor) 若两个三角级数

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在$[-\pi,\pi]$上都收敛到同一个函数,则此两级数恒同,即$\alpha_0=a_0$,且$\alpha_n=a_n$,$\beta_n=b_n$.$(n=1,2,\cdots)$

命题 12 说明,如果一个函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可用一个三角级数表示,那么这个三角级数是唯一的.进一步的问题是:这个三角级数是$f(x)$的 Fourier 级数吗?显然,我们已经知道,一个点点收敛的三角级数可以不是 Fourier 级数.但是,我们有下述著名结果:

命题 13(Du Bois Reymond) 设$f\in R[-\pi,\pi]$,若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可以表成三角级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in[a,b],$$

则此级数必是$f(x)$的 Fourier 级数.

[General Information]
书名=数学分析　第二册
作者=周民强编著
页数=405
SS号=11224256
DX号=
出版日期=2003年01月第1版
出版社=上海科学技术出版社